مبادئ التحليل الكمي

الدكتور
عبد أحمد أبو بكر

الأستاذ الدكتور
وليد اسماعيل السيفو

Principles of Quantitative Analysis





مبادئ التحليل الكمي



مبادئ التحليل الكمي

الدكتور
عيد أحمد أبو بكر
جامعة بني سويف – مصر
كلية الاقتصاد والعلوم الإدارية
جامعة الزيتونة الأردنية
عمان - الأردن

الأستاذ الدكتور
وليد إسماعيل السيفو
جامعة ويلز – بريطانيا
كلية الاقتصاد والعلوم الإدارية
جامعة الزيتونة الأردنية
عمان - الأردن

الإهداء

إلـى...

والـدتـي .. أطال الله فـي عمرها

زوجتي .. حبـاً واعتـزازاً وتـقـديـراً

أولادي: مـنـة الله، أحمـد، آيـة ... قـرة عيـنـي

عيـد

إلـى ...

زوجتـي أطـال الله فـي عمرهـا وأفـادتـنا بـإيـمـانـهـا

أولادي: خـالـد، سيف، دعاء، إسماعيل .. قـرة عيـنـي

ولـيـد

المحتويات

مقدمة

الحمد لله رب العالمين والصلاة والسلام على أشرف المرسلين سيدنا ونبينا محمد بن عبد الله ﷺ وعلى آله وصحبه والتابعين إلى يوم الدين أجمعين.

لقد شهدت العلوم الاقتصادية والإدارية والمالية تطوراً كبيراً في السنوات القليلة الماضية ويرجع ذلك إلى التطور والتقدم التكنولوجي الهائل، واستخدام الحاسوب في حل المشاكل الاقتصادية والإدارية والمالية، فقد أصبح التحليل الكمي هو السمة الغالبة على كافة البحوث في هذه العلوم في دول العالم المتقدم، وقد نكون غير مبالغين إذا قلنا أنه قلما تجد مقالاً أو بحثاً منشوراً في المجالات العلمية العالمية المتخصصة يخلو من استخدام أساليب التحليل الكمي.

بل أن أساليب التحليل الكمي التي تستخدم في التحليلات الاقتصادية والإدارية والمالية قد تطورت تطوراً كبيراً خلال السنوات القليلة الماضية، إلا أن اعتماد الباحثين في العالم العربي على استخدام أساليب التحليل الكمي في هذه العلوم ما زال محدوداً، مما جعل معظم الأبحاث تتصف بالوصفية والبعد عن الجوانب التطبيقية والتحليلات الكمية.

وحيث أن معظم المتغيرات الاقتصادية والإدارية والمالية هي متغيرات كمية تربط فيما بينها علاقات دالية، فقد أصبح استخدام الأساليب الكمية ضرورة لا غنى عنها إذا ما أردنا التعبير عن هذه العلاقات بدقة ووضوح.

وهذا الكتاب لا يتناول فقط مجرد مبادئ التحليل الكمي وإنما يتعمق في تحليل الأساليب والموضوعات ليعطي للقارئ فهماً حقيقياً للأساليب الرياضية الكمية، كما يعطي العديد من التطبيقات لكل من هذه الأساليب في المجالات المختلفة للعلوم الاقتصادية والإدارية والمالية.

ويتمثل الهدف الأساس لهذا الكتاب في تزويد القارئ والدارس بالمعالجة الكمية الحديثة للعديد من هؤلاء الطلاب الذين لديهم معرفة متواضعة بالأساليب الجدية والرياضية، كما أن الاستخدام المضطرد للأساليب الكمية في مجال التطبيقات الاقتصادية والإدارية والمالية والمحاسبية قد وفّر الكثير من الوقت والجهد على متخذي القرارات، وساعدهم في ذات الوقت على الحصول على نتائج تتسم بقدر كبير من الدقة.

وتؤثر أساليب التحليل الكمي بشكل مضطرد في حياتنا اليومية، كما أنه يمكن استخدامها في جميع المشاكل بغض النظر عن كونها كمية أو وصفية، ولقد ظهر هذا الاهتمام المتزايد باستخدام أساليب التحليل الكمي منذ أن أصبحت جائزة نوبل تمنح لبعض الباحثين في هذا المجال، فلقد حصل كل من Koopmans & Kantorvich على جائزة نوبل في الاقتصاد عام 1975 بعد الإضافة العلمية الكبيرة التي قدماها باستخدام أساليب البرمجة الخطية في بعض المشاكل الاقتصادية والإدارية المعقدة.

ونأمل أن يفيد هذا الكتاب قارئه سواءً كان طالباً أو باحثاً في استخدام أساليب التحليل الكمي لفهم وصياغة وحل المشاكل الاقتصادية والإدارية والمالية والمحاسبية وذلك بغرض تطوير هذه العلوم الاجتماعية.

والله ولي التوفيق،،،

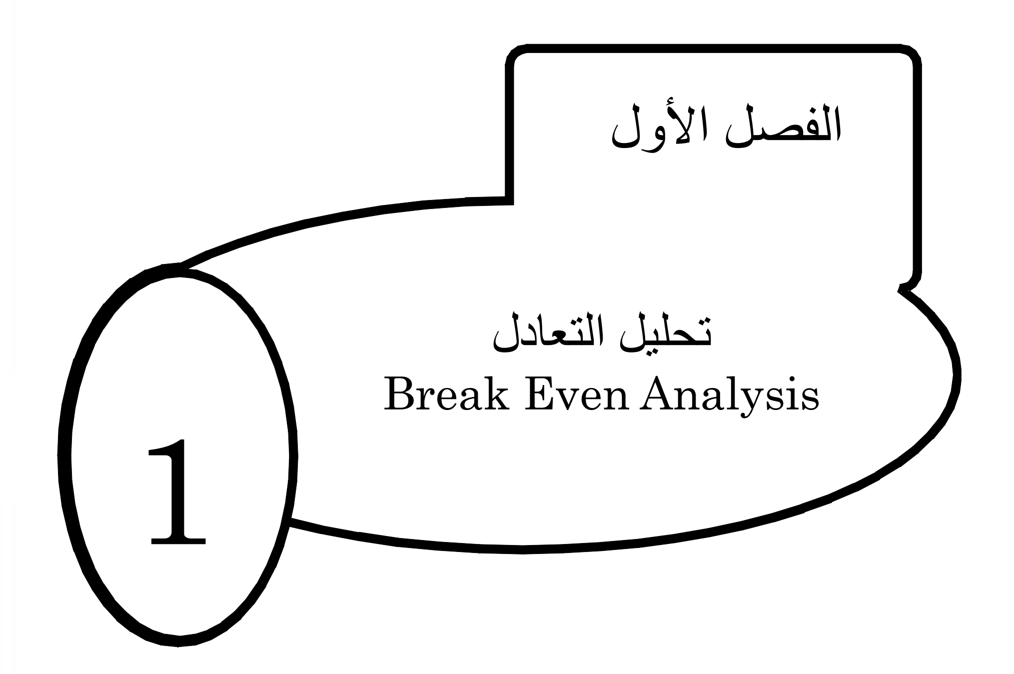
المؤلفان

الباب الأول

1

التحليل الكمي للعلاقة بين المتغيرات الاقتصادية

- **الفصل الأول: تحليل التعادل**
- **الفصل الثاني: الدالة التربيعية**
- **الفصل الثالث: الأمثلية للدوال الاقتصادية**



الفصل الأول
تحليل التعادل
Break Even Analysis
1

الفصل الأول
تحليل التعادل
Break Even Analysis

1- مفهوم تحليل التعادل:

في معظم الأحيان تكون العلاقة بين عدد الوحدات المنتجة والتكاليف الإجمالية لها علاقة خطية، كذلك العلاقة بين عدد الوحدات المنتجة أو المباعة والإيراد الكلي، فإذا ما زادت التكلفة عن الإيراد ينتج عن ذلك خسارة، أما إذا زاد الإيراد عن التكلفة فإن ذلك يعني تحقيق ربح، وفي الحالة التي تتساوى فيها التكلفة مع الإيراد فإن ذلك يعني عدم تحقيق ربح أو خسارة وتسمى هذه الحالة بنقطة التعادل Break even point والتي يتقاطع عندها الخط المستقيم الذي يمثل التكلفة الكلية مع الخط المستقيم الذي يمثل الإيراد الكلي، فهي بذلك تمثل النقطة التي تعبر عن الحجم أو الكمية التي تُغطي فيها التكاليف الكلية (ثابتة ومتغيرة)، وتسمى أيضاً بنقطة التوازن (Equilibrium Point).

وبذلك فإن تحليل التعادل يساعد في تحديد حجم الوحدات المنتجة أو المباعة، أي تحديد حجم المبيعات الذي يجعل المنتج استثماراً مربحاً. ويهدف تحليل التعادل إلى إيجاد النقطة -بالمبالغ أو بالوحدات- التي تتساوى فيها التكاليف الكلية مع الإيراد الكلي، أي: TR = TC

ويستخدم تحليل التعادل في تخطيط الإنتاج أو الخدمات، حيث أنه يهدف إلى تحديد عدد الوحدات (حجم المخرجات أو مستوى النشاط) الذي تتساوى فيه الإيرادات الكلية مع التكاليف الكلية وبذلك فهو يهدف إلى تقدير الأرباح المحتملة أو الخسائر المحتملة لمنتج ما.

2- تصنيف التكاليف حسب علاقتها بحجم النشاط

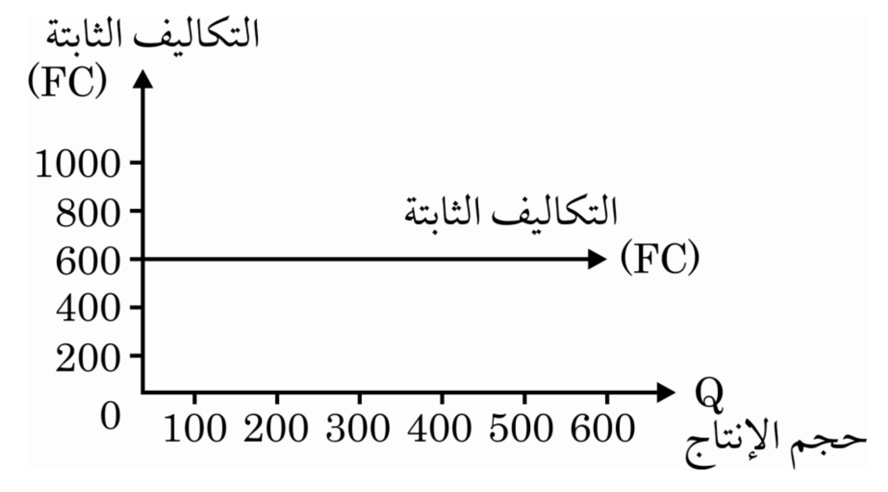
تنقسم حسب علاقتها بحجم النشاط إلى:

2-1- التكاليف الثابتة: Fixed Cost (FC)

وهي تمثل التكاليف التي تنفق بغض النظر عن حجم الإنتاج، أي أنها لا تتغير بتغير حجم الإنتاج (ثابتة) وهذه التكاليف تظل ثابتة إلى مستوى معين من حجم الإنتاج وتتصف هذه التكاليف بأنها ثابتة بالنسبة لحجم

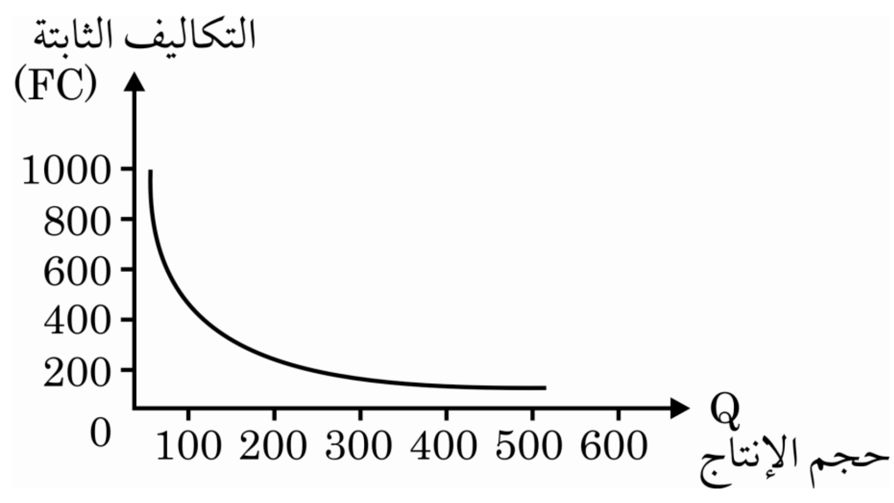
الإنتاج الإجمالي ومتغيرة بالنسبة للوحدة الواحدة (فكلما زاد حجم الإنتاج انخفض نصيب الوحدة الواحدة من التكاليف الثابتة). ومن أمثلة التكاليف الثابتة: تكلفة الأراضي والإيجار، وتكاليف المعدات والآلات).

والشكل التالي يوضح سلوك التكاليف الثابتة الإجمالية (الكلية).



شكل (1) يوضح التكلفة الثابتة الإجمالية (الكلية)

والشكل التالي يوضح سلوك التكلفة الثابتة للوحدة الواحدة.



شكل (2) يوضح التكلفة الثابتة للوحدة الواحدة

2-2- التكلفة المتغيرة : Variable Cost (VC)

هي التكاليف التي تتغير بتغير حجم الإنتاج فتزداد بزيادة الإنتاج وتنخفض بانخفاض حجم الإنتاج وتندثر أو تتلاشى (تساوي صفرا) في حالة التوقف عن الإنتاج، وهي تمثل نصيب الوحدة الواحدة من التكاليف المتغيرة الكلية أي أنها تكاليف ثابتة للوحدة الواحدة (على مستوى الوحدة) ومتغيرة بالنسبة لإجمالي حجم الإنتاج ومن الأمثلة على التكاليف المتغيرة تكلفة المواد الخام، الأجور.

3-2- التكلفة المتغيرة الكلية Total Variable Cost (TVC)

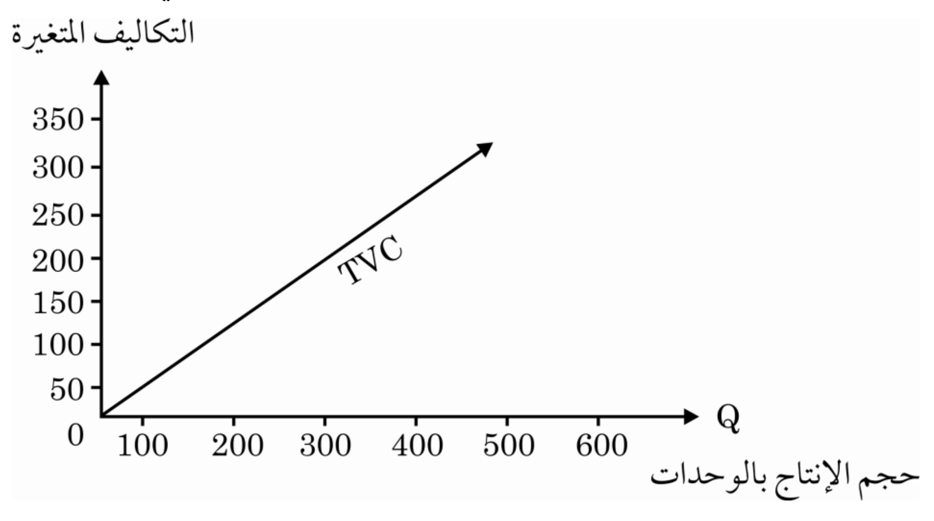
وهي تمثل حاصل ضرب نصيب الوحدة الواحدة من التكاليف المتغيرة (التكلفة المتغيرة للوحدة الواحدة) في عدد الوحدات.

أي أن:

التكلفة المتغيرة الكلية = التكلفة المتغيرة للوحدة الواحدة × حجم الإنتاج.

$$TVC = VC \times Q$$

ويمكن التعبير عن التكاليف المتغيرة من خلال الشكل التالي.



شكل (3) يوضح التكلفة المتغيرة الكلية

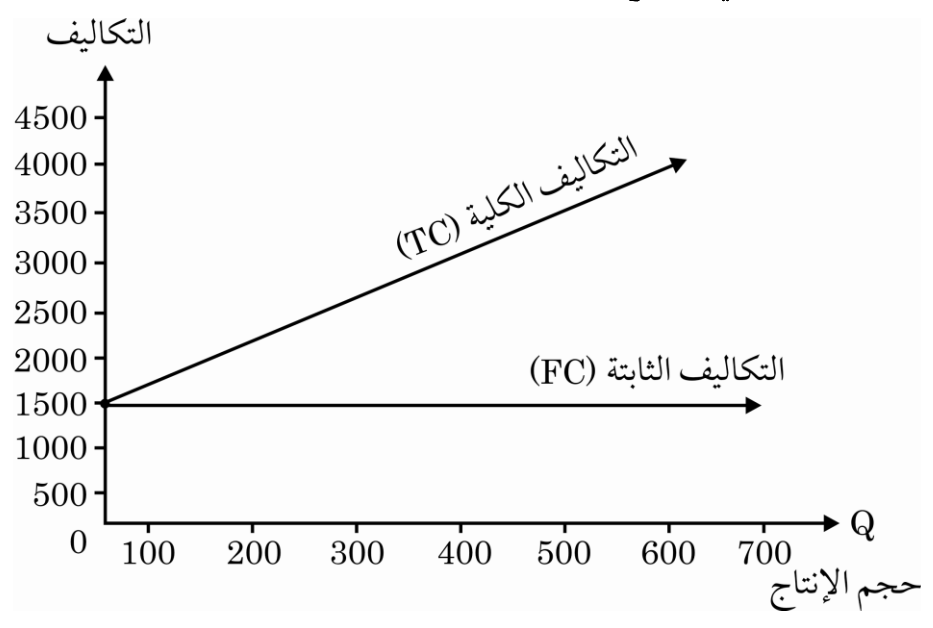
2-4- التكلفة الكلية Total Cost (TC)

هي تمثل إجمالي ما تنفقه المنشأة من أموال في سبيل إنتاج حجم معين من الإنتاج (الوحدات) أي أنها دالة في حجم الإنتاج (تتغير بتغير حجم الإنتاج) مثل تكلفة المواد الخام، ساعات العمل، مصاريف الصيانة، مصاريف الكهرباء وعليه:

التكلفة الكلية = التكلفة الثابتة + التكلفة المتغيرة الكلية

$$TC = FC + TVC$$
$$= FC + VC(Q)$$

والشكل التالي يوضح التكاليف الكلية.



شكل (4) يوضح التكلفة الكلية

2-5- التكلفة المتوسطة: Average cost (Ac)

وهي تمثل متوسط تكلفة الوحدة الواحدة من التكاليف الكلية بمعنى أنها تمثل نصيب الوحدة الواحدة من التكلفة الكلية.

$$\text{التكلفة المتوسطة} = \frac{\text{التكلفة الكلية}}{\text{حجم الإنتاج}}$$ أي:

$$AC = \frac{TC}{Q}$$

3- التحليل الاقتصادي والرياضي للتكاليف:

يتطلب تحليل التعادل تقدير ومعرفة التكاليف الثابتة FC، والتكاليف المتغيرة الكلية TVC، والإيراد الكلي TR. ثم بعد ذلك إيجاد ومعرفة العلاقات بينهم حيث أن:

$$\text{Total Cost (TC)} = FC + TVC$$

$$\text{Total Variable Cost (TVC)} = VC \times Q$$

$$\text{Average Fixed Cost (AFC)} = \frac{FC}{Q}$$

$$\text{Average Variable Cost (AVC)} = \frac{TVC}{Q}$$

$$\text{Average cost (Ac)} = \frac{TC}{Q}$$

$$= \frac{FC + TVC}{Q}$$

$$= \frac{FC}{Q} + \frac{TVC}{Q}$$

$$= AFC + AVC$$

$$\text{Marginal Cost Mc} = \frac{dTC}{dQ}$$

ويمكن توضيح ذلك من خلال الجدول التالي:

جدول رقم (1)
يوضح العلاقة بين أنواع التكاليف المختلفة

الكمية Q	التكلفة الثابتة FC	التكلفة المتغيرة الكلية TVC	التكلفة الكلية TC	متوسط التكلفة الثابتة AFC	متوسط التكلفة المتغيرة AVC	التكلفة المتوسطة AC	التكلفة الحدية MC
1	100	20	120	100	20	100	-
2	100	38	138	50	19	69	18
3	100	51	151	33.33	17	50.33	13
4	100	62	162	25	15.5	40.5	11
5	100	75	175	20	15	35	13
6	100	90	190	16.67	15	31.67	15
7	100	110	210	14329	15.71	30	20
8	100	134	234	12.50	16.75	29.25	24
9	100	163	263	11.11	18.11	29.22	29
10	100	200	300	10	20	30	37

4- افتراضات تحليل التعادل:

حيث أن تحليل التعادل يهدف إلى تحديد مستوى الإنتاج (عدد الوحدات) الواجب إنتاجها حتى يمكن تغطية إجمالي تكاليف المشروع الخاصة بإنتاج المنتج، بمعنى أنه يشير إلى النقطة التي تتساوى عندها التكاليف الكلية مع الإيراد الكلي.

ويستند تحليل التعادل إلى بعض الافتراضات الأساسية التي تهدف إلى التسهيل من عملية التحليل. وفيما يلي أهم الفروض التي يستند إليها تحليل التعادل:

أ- افترض أن عناصر الإيرادات والتكاليف تأخذ علاقة خطية.

ب- سعر البيع لا يتغير مع تغير الكمية.

ج- أن هناك منتج وحيد أو مزيج ثابت من المنتجات.

د- أن التكلفة الكلية تتكون من التكاليف الثابتة والتكاليف المتغيرة.

هـ- افتراض عدم تغير (ثبات) التكلفة الثابتة في ظل الطاقة المتاحة.

و- أن حجم الإنتاج هو العامل المؤثر المهم (وقد يكون الوحيد) في التكلفة.

ز- لا يوجد تخزين، حيث أن عدد الوحدات المنتجة تباع بالكامل.

ح- ثبات التكلفة المتغيرة للوحدة الواحدة من الإنتاج.

5- تحديد نقطة التعادل:

5-1- باستخدام الطريقة الرياضية:

يفرض أن:

Q: تعبر عن حجم الإنتاج (عدد الوحدات المنتجة أو المباعة) خلال فترة زمنية.

FC: تعبر عن التكلفة الثابتة.

VC: تعبر عن التكلفة المتغيرة للوحدة الواحدة.

P: سعر بيع الوحدة.

وبذلك فإن:

1- الإيراد الكلي Total Revenue

يعرف بأنه إجمالي ما تحصل عليه المنشأة من أموال نظير بيع حجم معين من الإنتاج وبسعر معين.

أي أن الإيراد الكلي هو محصلة ضرب السعر في الكمية المنتجة أو المباعة.

∴ الإيراد الكلي = السعر × الكمية

أو $TR = P \times Q$

2- التكلفة الكلية Total Cost (TC)

التكلفة الكلية = التكلفة الثابتة + التكلفة المتغيرة الكلية

$$TC = FC + TVC$$

$$TC = FC + VC\,(Q)$$

لتحديد نقطة تحليل التعادل Break even Point هي النقطة التي يتساوى عندها الإيراد الكلي (TR) مع التكاليف الكلية (TC):

أي: $TR = TC$

أو: $P \times Q = FC + TVC$

$$P \times Q = FC + VC\,(Q)$$

$$FC = P \times Q - VC\,(Q)$$

$$FC = Q\,(P - VC)$$

$$\therefore Q = \frac{FC}{P - VC}$$

حيث أن Q تمثل حجم الإنتاج الذي يحقق نقطة التعادل (BEP) وحيث أن P تمثل سعر بيع الوحدة الواحدة، VC تمثل التكلفة المتغيرة للوحدة الواحدة، فإن الربح من بيع الوحدة الواحدة (πc) وهو ما يطلق عليه عائد المساهمة Profit Contribution، ويمكن التعبير عنه بالصورة:

$$\pi c = P - VC$$

وبذلك فإن حجم الإنتاج الذي يحقق التعادل (Q) هو:

$$Q = \frac{FC}{\pi c}$$

وعائد المساهمة πc هو العائد الذي يستخدم لمقابلة التكاليف الثابتة وتحقيق الربح بعد تغطية كامل التكاليف الثابتة.

2-5- باستخدام الطريقة البيانية:

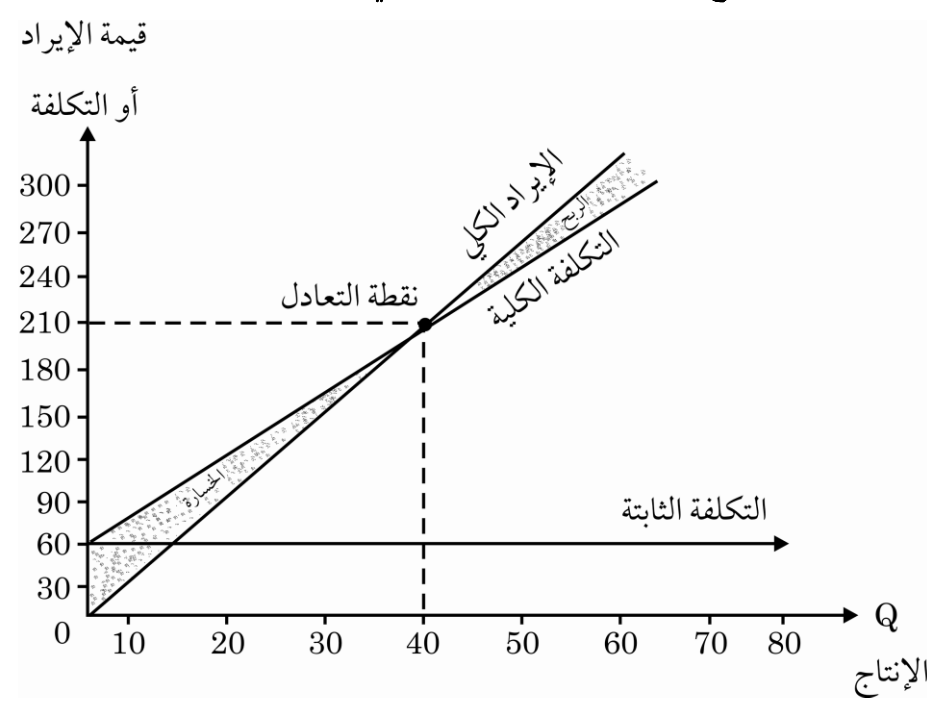
يمكن إيجاد حجم الإنتاج الذي يحقق التعادل بواسطة الرسم البياني، حيث أن العلاقة بين حجم الإنتاج وكلاً من التكاليف الكلية والإيراد الكلي هي علاقة خطية، وبذلك فإن نقطة التعادل هي نقطة تقاطع الخط الذي يمثل دالة الإيراد الكلي مع الخط الذي يمثل دالة التكلفة الكلية. وبذلك فإن تحديد حجم الإنتاج الذي يحقق التعادل من خلال الرسم البياني تتبع الخطوات التالية:

1- تحديد دالة الإيراد الكلي TR ثم رسمها بيانياً.

2- تحديد دالة التكلفة الكلية TC ثم رسمها بيانياً.

3- نقطة تقاطع دالة الإيراد الكلي مع دالة التكلفة الكلية تمثل نقطة التعادل.

ويمكن توضيح ذلك من خلال الشكل التالي:



شكل (5) يوضح تحليل نقطة التعادل

6- تطبيقات على تحليل التعادل:

مثال (1): إحدى المحلات التي تتعامل في الملابس الجاهزة، فإذا كانت التكلفة المتغيرة للوحدة الواحدة 1.05 دولار والتكلفة الثابتة 330 دولار، وكان سعر بيع الوحدة 2 دولار.

المطلوب:

1- ما هو عدد الوحدات الواجب بيعها حتى يمكن تحقيق ربح.

2- إذا كان سعر بيع الوحدة ارتفع إلى 2.25 دولار فما أثر ذلك على نقطة التعادل (حجم الإنتاج).

3- إذا كان عدد الوحدات المباعة هو 325 وحدة، فما هو السعر الذي يجب البيع به حتى لا تتحقق خسائر.

خطوات الحل:

المعطيات:

- التكلفة المتغيرة للوحدة الواحدة (VC) = 1.05 دولار
- التكلفة الثابتة (FC) = 330 دولار
- سعر البيع P = 2 دولار

فإن:

التكلفة المتغيرة الكلية

$$TVC = VC\,(Q) = 1.05\,Q$$

التكلفة الكلية

$$TC = FC + TVC = 330 + 1.05\,Q$$

الإيراد الكلي

$$TR = P \times Q = 2\,Q$$

1- عند التعادل (نقطة عدم تحقيق ربح أو خسارة) تتساوى التكلفة الكلية مع الإيراد الكلي.

$$TR = TC$$

$$Q = 330 + 1.05\,Q2$$

$$Q - 1.05\,Q = 3302$$

$$.95\,Q = 330$$

$$\therefore Q = \frac{330}{.95} \approx 347 \text{ وحدة}$$

ويمكن تحديد نقطة التعادل من خلال العلاقة:

$$\therefore Q = \frac{FC}{P\text{-}VC}$$

$$\therefore Q = \frac{330}{2 - 1.05} = \frac{330}{.95} \approx 347$$

معنى ذلك أنه عند بيع أقل من 347 وحدة فإن ذلك يعني تحقيق خسارة بينما في حالة بيع أكثر من 347 وحدة يعني تحقيق ربح.

2- عندما يزداد سعر بيع الوحدة إلى 2.25 دولار فإن:

$$TR = 2.25\,Q$$

$$TC = 330 + 1.05\,Q$$

$$TR = TC$$

$$2.25\,Q = 330 + 1.05\,Q$$

$$2.25\,Q - 1.05 = 330$$

$$1.20\,Q = 330$$

$$Q = \frac{330}{1.20} = 275$$ وحدة

عند السعر الجديد 2.25 دولار فإن التعادل يتحقق عند بيع 275 وحدة فقط وهذا يوضح أثر زيادة السعر على نقطة التعادل.

ويمكن تحديد نقطة التعادل من خلال العلاقة مباشرة:

$$\therefore Q = \frac{FC}{P-VC}$$

$$Q = \frac{330}{2.25 - 1.05} = \frac{330}{12.} = 275$$

3- إذا كان عدد الوحدات المباعة 325 وحدة فما هو سعر بيع الوحدة (P).

∴ التكلفة الكلية $TC = FC + TVC$

$$= 330 + 1.05\,Q$$

الإيراد الكلي $TR = P\,Q$

$$= P \times 325$$

$$= 325\,P$$

وعند التعادل فإن:

$$TR = TC$$

$$325\ P = 1.05\ Q + 330$$

بالتعويض عن $Q = 325$

$$325\ P = (1.05 \times 325) + 330$$

$$325\ P = 341.25 + 330$$

$$325\ P = 671.25$$

$$\therefore P = \frac{671.25}{325} = 2.065$$ دولار

ولذا فإنه عند سعر بيع 2.065 دولار للوحدة يمكن بيع 325 وحدة دون تحقيق ربح أو خسارة.

حل آخر: يمكن تحديد سعر بيع الوحدة من خلال تطبيق العلاقة:

$$\therefore Q = \frac{FC}{P - VC}$$

$$325 = \frac{330}{P - 1.05}$$

بالضرب التبادلي

$$330 = 325\ (P - 1.05)$$

$$\frac{330}{325} = \frac{325\,(P - 1.05)}{325}$$

$$1.015 = P - 1.05$$

$$\therefore P = 1.015 + 1.05$$

$$P = 2.065$$ دولار

مثال (2): في إحدى توكيلات بيع الجرائد، فإذا كان سعر بيع الوحدة 2 دولار، وأن تكلفة شراء الوحدة هي واحد دولار، وأن هذا التوكيل يتحمل تكلفة ثابتة تبلغ 200 دولار.

المطلوب:

1- تحديد التكلفة اليومية لشراء عدد (Q) من الجرائد.

2- الإيراد اليومي من بيع عدد (Q) من الجرائد.

3- تحديد نقطة التعادل جبرياً (رياضياً) وبيانياً.

خطوات الحل:

حيث أن: سعر البيع (P) = 2 دولار.

التكلفة المتغيرة للوحدة الواحدة (VC) = 1 دولار.

التكلفة الثابتة FC = 200 دولار.

فإن:

(1) التكلفة الكلية TC = التكلفة الثابتة + التكلفة المتغيرة الكلية

$$TC = FC + TVC$$
$$= 200 + 1(Q)$$
$$= 200 + Q$$

(2)الإيراد الكلي TR = السعر × الكمية المباعة

$$TR = P \times Q$$
$$\therefore = 2Q$$

(3) عند التعادل فإن:

$$TR = TC$$
$$2Q = 200 + Q$$
$$2Q - Q = 200$$
$$\therefore Q = 200$$

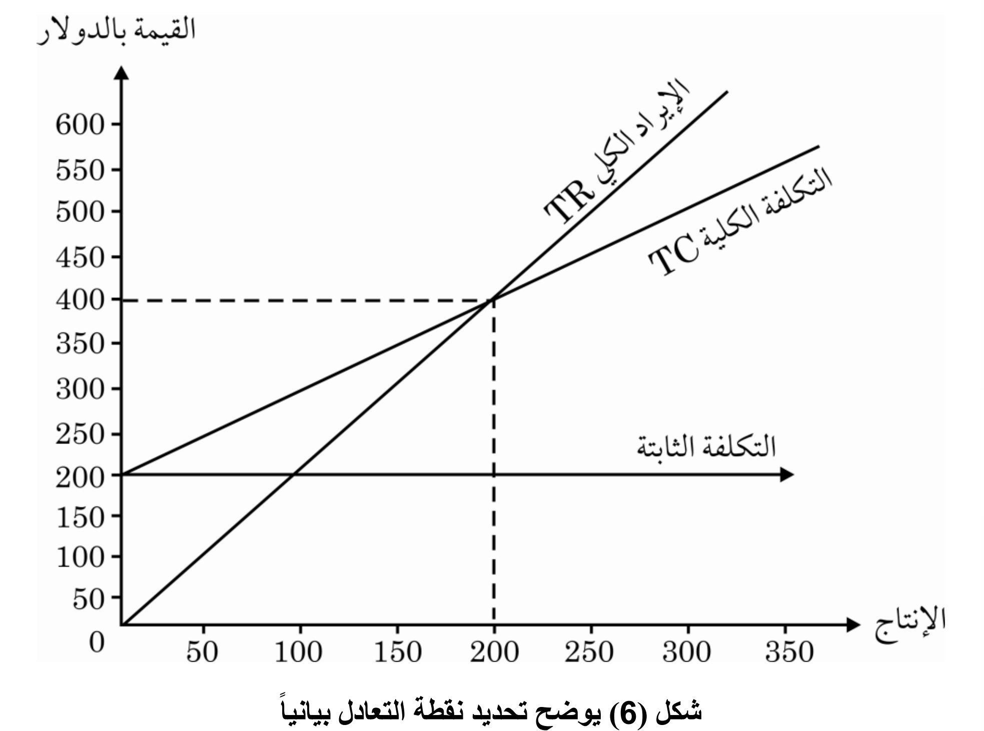
معنى ذلك أنه لكي تتحقق نقطة التعادل فإنه يجب أن يبيع يومياً 200 جريدة، وفي حالة بيع أقل من ذلك العدد تتحقق خسائر وفي حالة بيع أكثر من ذلك يتحقق ربح ويمكن الوصول إلى نقطة التعادل من خلال العلاقة.

$$Q = \frac{FC}{P - VC}$$

$$Q = \frac{200}{2-1} = \frac{200}{1} = 200 \text{ وحدة}$$

ويمكن الوصول إلى نقطة التعادل من خلال الرسم البياني كما يلي:

حيث يتم رسم دالة الإيراد الكلي (TR)، ودالة التكلفة الكلية (TC) ونقطة التقاطع تمثل نقطة التعادل. انظر الشكل البياني (6) أدناه.



شكل (6) يوضح تحديد نقطة التعادل بيانياً

مثال 3: يفرض أنه في المثال السابق حدث زيادة في تكلفة شراء الجريدة الواحدة ليصبح 1.25 دولار وارتفعت التكلفة الثابتة لتصبح 225 دولار.

المطلوب: ما هو عدد الجرائد الواجب بيعها يومياً لتحقيق أرباح؟ وإذا كان معلوم لدينا أنه من الممكن بيع 275 جريدة يومياً فما هو سعر البيع الواجب البيع به لضمان عدم تحقيق خسائر.

خطوات الحل:

المعطيات:

- تكلفة شراء الجريدة الواحدة (VC) = 1.25 دولار.
- التكلفة الثابتة (FC) = 225 دولار.
- سعر بيع الجريدة P = 2 دولار.

التكلفة الكلية (TC) = FC + TVC

= FC + VC (Q)

= 225 + 1.25 Q

الإيراد الكلي $TR = P \times Q$
$= 2 \times Q$

عند التعادل فإنه:

$$TR = TC$$
$$2Q = 225 + 1.25Q$$
$$2Q - 1.25Q = 225$$
$$.75Q = 225$$
$$\therefore Q = \frac{225}{.75} = 300 \text{ جريدة}$$

وبالتالي يجب بيع أكثر من 300 جريدة يومياً لتحقيق ربح ويمكن الوصول إلى نقطة التعادل من خلال العلاقة التالية:

$$\therefore Q = \frac{FC}{P - VC}$$
$$\therefore Q = \frac{225}{2 - 1.25} = \frac{225}{.75} = 300 \text{ جريدة}$$

أما إذا كان من الممكن بيع 275 جريدة يومياً فما هو السعر الواجب البيع به حتى لا يمكن تحقيق خسارة فإن التكلفة الكلية.

التكلفة الكلية $TC = 1.25Q + 225$

بالتعويض عن $(Q) = 275$

$TC = 1.25\,(275) + 225$

$= 343.75 + 225 = 568.75$

الإيراد الكلي $TR = P \times Q$
$= P \times 275$

عند التعادل فإن:

$$TR = TC$$
$$275P = 568.75$$
$$P = \frac{568.75}{275} = 2.068 \text{ دولار}$$

أي أنه يجب بيع الجريدة الواحدة بـ 2.068 دولار حتى يضمن عدم تحقيق خسارة وذلك إذا كان من المؤكد بيع 275 جريدة يومياً.

ويمكن الوصول إلى ذلك من خلاف تطبيق العلاقة:

$$Q = \frac{FC}{P - VC}$$

$$275 = \frac{225}{P - 1.25}$$

$$225 = 275(P - 1.5)$$

بالقسمة على 275

$$.818 = P - 1.25$$

$$P = .818 + 1.25$$

$$P = 2.068$$ دولار

7-درجة الرافعة التشغيلية Degree of operating leverage

يستخدم تحليل التعادل (والذي يطلق عليه أحياناً تحليل التكلفة – الحجم – الربح) (Cost – Volume – Profit Analysis) كأداة لتحليل أثر الرافعة التشغيلية، وحتى يمكن توضيح العلاقة بين الرافعة التشغيلية والربح نفرض أن هناك ثلاث شركات A , B , C مع وجود اختلاف في درجة الرافعة التشغيلية، وكذلك هناك اختلاف في خبرة الشركات الثلاثة.

يفرض أن الشركة (A) تستخدم معدات رأسمالية قليلة وتكلفة ثابتة قليلة ولكن معدل التزايد في التكلفة المتغيرة يتزايد بسرعة، ونقطة التعادل لهذه الشركة تكون عند مستوى نشاط منخفض مقارنتاً بالشركة (B)، فمثلاً بفرض أنه عند مستوى إنتاج 40000 وحدة فإن الشركة (B) تخسر 80000 دولار، ولكن الشركة (A) تحقق التعادل، وبفرض أن الشركة (C) تستخدم درجة عالية من الآلية الحديثة أو التكنولوجيا الحديثة في الإنتاج وتستخدم تكاليف ثابتة مرتفعة، والتكلفة المتغيرة للوحدة تتزايد بمعدل بطيء (منخفض)، فإن الشركة (C) تكون نقطة التعادل لها أعلى من الشركة (A) والشركة (B)، ولكن الشركة (C) بعد أن تجتاز نقطة التعادل فإن الأرباح تتزايد بسرعة عن الشركتين (A) , (B).

وتعرف درجة الرافعة التشغيلية بأنها نسبة التغير في الأرباح الناتج عن التغير في حجم المبيعات بمقدار وحدة واحدة.

أي أن:

نسبة التغير في الأرباح / نسبة التغير في حجم المبيعات = درجـة الرافعـة التشـغيلية

$$Degree\ of\ Operating\ Leverage\ (DOL)$$

$$= \frac{Percentage\ Change\ in\ Porfit}{Perantage\ Change\ in\ Sales}$$

$$= \frac{d\pi/\pi}{dQ/Q} = \frac{d\pi}{dQ} \times \frac{Q}{\pi}$$

وبذلك فإن درجة الرافعة التشغيلية هي مفهوم للمرونـة، حيث أنـه تمثل مرونة الربح بالنسبة لحجم المخرجات وهي تعتمد على أن كل من منحنـى دالة التكاليف ودالة الإيراد تكون في شكل علاقة خطية.

ويتضح ذلك من خلال المثال التالي:

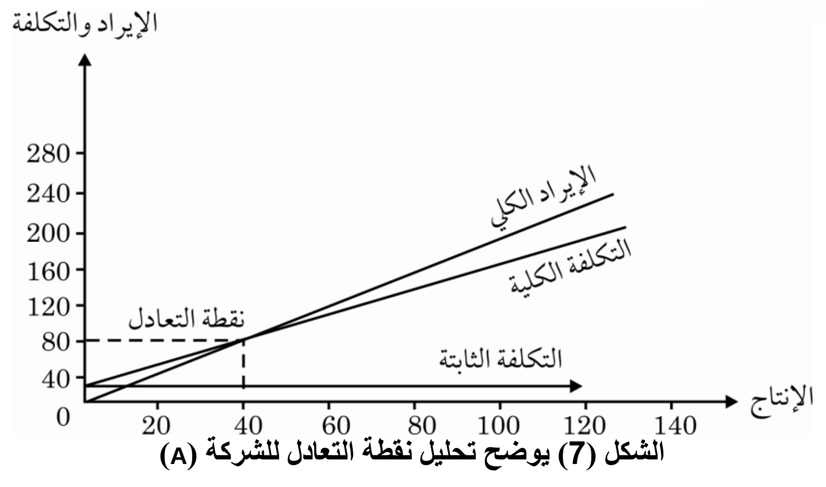
الشركة (A):

- يفرض أن سعر بيع الوحدة = 2 دولار.
- يفرض أن التكلفة الثابتة = 20000 دولار.
- يفرض أن التكلفة المتغيرة للوحدة الواحدة = 1.5 دولار.

ويمكن تكوين الجدول التالي:

عدد الوحدات Q	الإيراد الكلي TR	التكلفة الكلية TC	الربح π
20000	40000	50000	(10000)
40000	80000	80000	0
60000	120000	110000	10000
80000	160000	140000	20000
100000	200000	170000	30000
120000	240000	200000	40000

ويمكن توضيح نقطة التعادل من خلال الشكل التالي:



الشكل (7) يوضح تحليل نقطة التعادل للشركة (A)

وبذلك يتحقق التعادل للشركة (A) عند مستوى إنتاج 40000 وحدة.

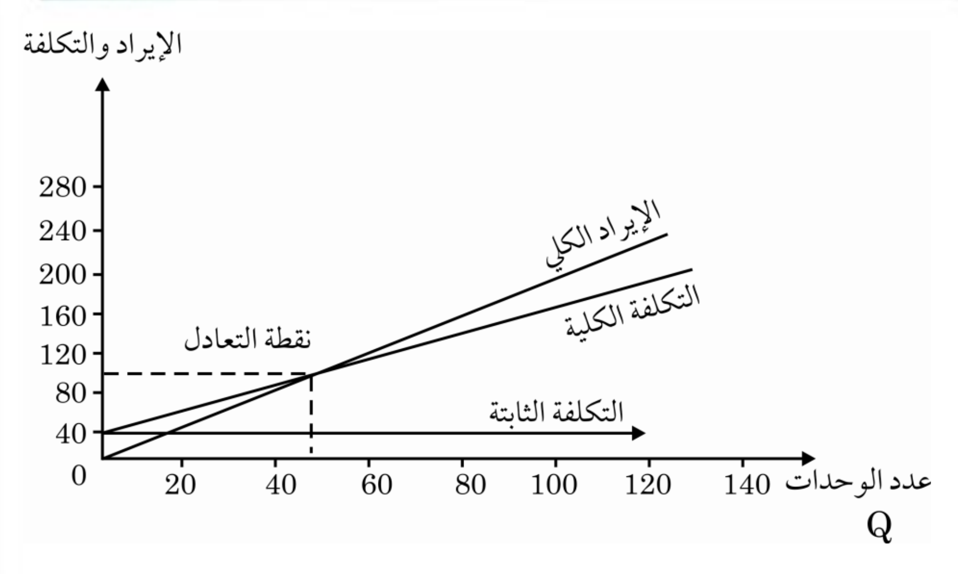
الشركة (B):

- يفرض أن سعر بيع الوحدة = 2 دولار.
- يفرض أن التكلفة الثابتة = 40000 دولار.
- يفرض أن التكلفة المتغيرة للوحدة الواحدة = 1.2 دولار.

ويمكن تكوين الجدول التالي:

عدد الوحدات Q	الإيراد الكلي TR	التكلفة الكلية TC	الربح π
20000	40000	64000	(24000)
40000	80000	88000	(8000)
60000	120000	112000	8000
80000	160000	136000	24000
100000	200000	160000	40000
120000	240000	184000	56000

ويمكن توضيح نقطة التعادل من خلال الشكل البياني التالي:



الشكل (8) يوضح تحليل نقطة التعادل للشركة (B)

وبذلك يتحقق التعادل للشركة (B) عند مستوى إنتاج 50000 وحدة.

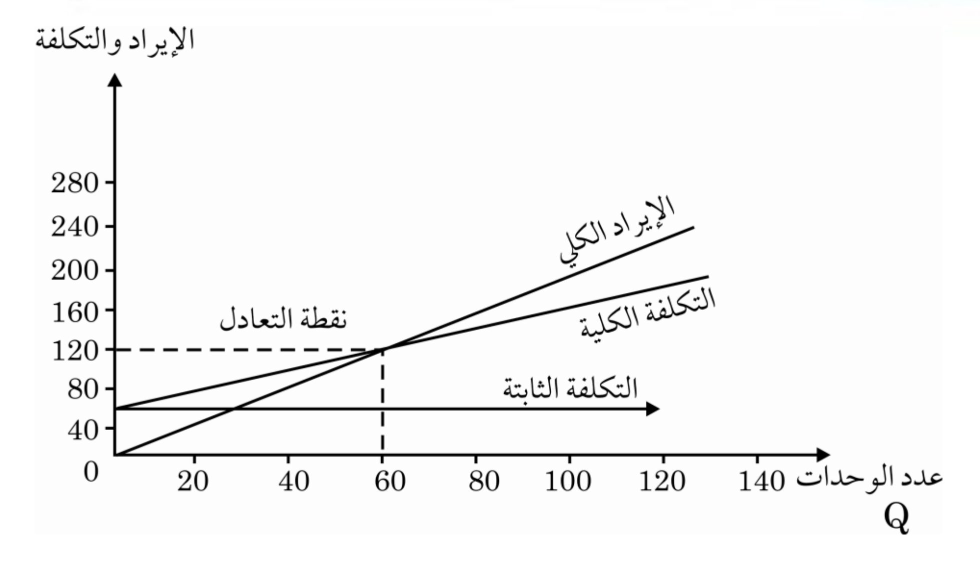
الشركة (C):

- يفرض أن سعر البيع للوحدة = 2 دولار.
- يفرض أن التكلفة الثابتة = 60000 دولار.
- يفرض أن التكلفة المتغيرة للوحدة = 1 دولار.

ويمكن تكوين الجدول التالي:

الربح π	التكلفة الكلية TC	الإيراد الكلي TR	عدد الوحدات Q
(40000)	80000	40000	20000
(20000)	100000	80000	40000
0	120000	120000	60000
20000	140000	160000	80000
40000	160000	200000	100000
60000	180000	240000	120000

ويمكن توضيح نقطة التعادل من خلال الشكل البياني التالي:



الشكل (9) يوضح تحليل نقطة التعادل للشركة (c)

من الجداول والأشكال السابقة يمكن توضيح درجة الرافعة التشغيلية فمثلاً في الشركة B تكون درجة الرافعة التشغيلية عند 100000 وحدة تكون كما يلي:

$$DOL = \frac{d\pi / \pi}{dQ / Q}$$

$$= \frac{(41600 - 40000) / 40000}{(102000 - 100000) / 100000} = \frac{1600 / 40000}{2000 / 100000}$$

$$= \frac{4\%}{2\%} = 2$$

حيث أن π تمثل الربح، Q كمية المخرجات من الوحدات.

ودرجة الرافعة التشغيلية يمكن أن تحسب عند أي مستوى من المخرجات، والتغير في المخرجات هو (dQ)، والتكلفة الثابتة هي دائماً مقدار ثابت، ويكون التغير في الربح $d\pi$ كما يلي:

$$d\pi = dQ\,(P - VC)$$

P هي سعر بيع الوحدة، VC التكلفة المتغيرة للوحدة وعند أي مستوى مبدئي للربح فإن:

$$\pi = Q\,(P - VC) - FC$$

وذلك فإن نسبة التغير في الربح تكون كما يلي:

$$\frac{d\pi}{\pi} = \frac{dQ\,(P - VC)}{Q\,(P - VC) - FC}$$

ونسبة التغير في حجم المخرجات $\frac{dQ}{Q}$ ولذا فإن نسبة التغير في الربح بالنسبة للتغير في حجم المخرجات أو مرونة الربح كما يلي:

$$\frac{d\pi/\pi}{dQ/Q} = \frac{dQ\,(P-VC)\,/\,[Q(P-VC)-FC]}{dQ/Q}$$

$$= \frac{dQ(P-VC)}{Q(P-VC)-FC} \times \frac{Q}{dQ}$$

وبعد إجراء الاختصارات يمكن صياغة معادلة درجة الرافعة التشغيلية عند أي مستوى من المخرجات.

$$DOL = \frac{Q(P-VC)}{Q(P-VC)-FC}$$

درجة الرافعة التشغيلية عند أي مستوى من المخرجات:

$$= \frac{\text{عدد الوحدات (سعر البيع – التكلفة المتغيرة)}}{\text{عدد الوحدات (سعر البيع – التكلفة المتغيرة) – التكلفة الثابتة}}$$

ويمكن تطبيق المعادلة السابقة على الشركة B عند مستوى إنتاج 100000 وحدة كما يلي:

$$DOL_B = \frac{100000\,(2-1.2)}{100000\,(2-1.2)-40000}$$

$$= \frac{80000}{40000} = 2$$

بتطبيق المعادلة السابقة على الشركة (A) عند إنتاج 100000وحدة كما يلي:

$$DOL_A = \frac{100000\,(2-1.5)}{100000\,(2-1.5)-20000}$$

$$= \frac{50000}{30000} = 1.67$$

بتطبيق المعادلة السابقة على الشركة (C) عند إنتاج 100000 وحدة كما يلي:

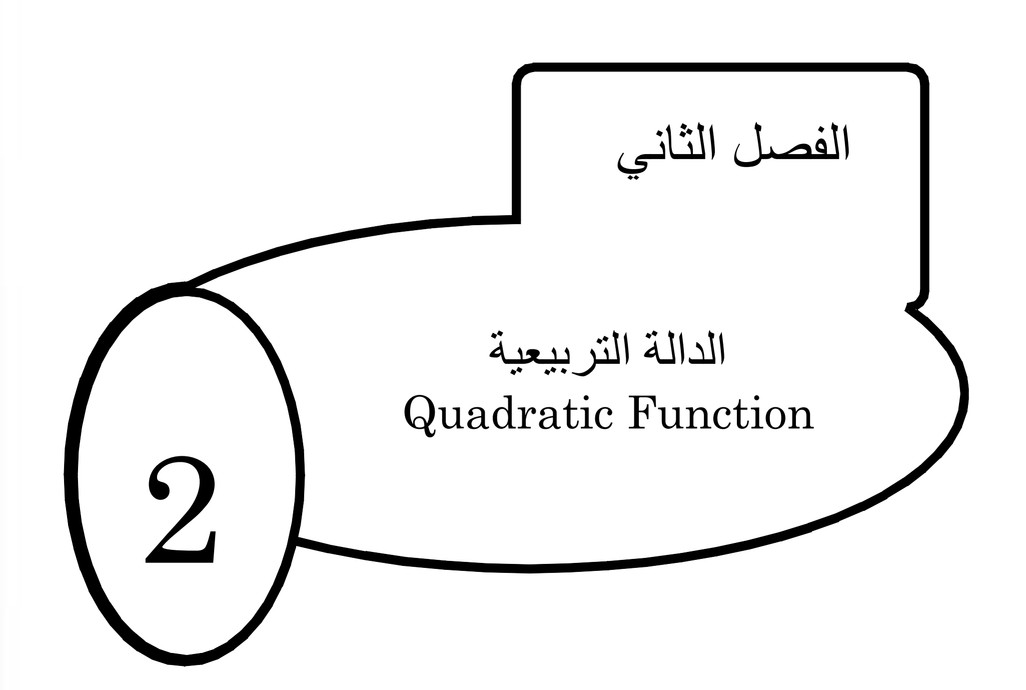
$$DOL_C = \frac{100000\,(2-1)}{100000\,(2-1) - 60000}$$

$$= \frac{100000}{40000} = 2.5$$

وهذا يعني أنه مع حدوث نسبة زيادة قدرها 2% في حجم إنتاج الشركة (C) -وهي تعتبر أفضل شركة من حيث الرافعة التشغيلية- سوف يزداد الربح بنسبة 5% بينما زيادة حجم الإنتاج في الشركة (A) -وهي شركة أقل من حيث درجة الرافعة التشغيلية- سوف يزداد الربح فقط بنسبة 3.3%.

ومن خلال المثال السابق عن الشركات الثلاثة يتضح لنا أن الربح في الشركة (C) يكون أكثر حساسية للتغير في حجم المبيعات بينما الربح في الشركة (A) يكون نسبياً قليل الحساسية للتغير في حجم المبيعات، بينما الشركة (B) تكون متوسطة من حيث درجة الرافعة التشغيلية، فهي تقع بين الشركتين.

تحليل التعادل يساعد على فهم العلاقة بين الحجم، السعر والتكلفة، فهو أيضاً يستخدم في التسعير، رقابة التكلفة أو التحكم فيها، والقرارات المالية الأخرى.


الفصل الثاني
الدالة التربيعية
Quadratic Function
2

الفصل الثاني
الدالة التربيعية
Quadratic Function

1- مقدمــة

معظم دوال العرض والطلب هي دوال غير خطية، ولكننا للتبسيط في التحليل قد اعتمدنا على دوال العرض والطلب الخطية، ولإيجاد التوازن في نموذج سوق غير خطي، والتي كثيراً ما تتمثل فيه دوال العرض والطلب بمعادلات غير خطية من الدرجة الثانية سيتم اعتماد أساليب جديدة في التحليل، ولأنه من الممكن أن يكون العرض والطلب ممثلاً بمنحى وليس بخط مستقيم، أيضاً حتى ولو كانت دالة الطلب خطية فإن الدوال المستقة منها مثل الإيراد الكلي والربح هي دوال غير خطية، وفي هذه الحالة فإنه من الضروري التعامل مع هذه الظروف باستخدام دوال أكثر تعقيداً، ومن أبسط الدوال غير الخطية ما يعرف بالدالة التربيعية، وهي التي تأخذ الشكل التالي:

$$F(x) = a\,x^{2} + b\,x + c$$

$$F(x) = a\,x^{2} + b\,x$$

$$F(x) = a\,x^{2} + c$$

$$F(x) = a\,x^{2}$$

وتسمى هذه الدالة دالة من الدرجة الثانية، وتمثل بمعادلات من الدرجة الثانية (تربيعية)، حيث يكون أحد متغيراتها مرفوع إلى الأس اثنين، أما باقي المتغيرات مرفوعة للأس واحد، أما القيم (a) (b) (c) فهي ثوابت.

2- حل المعادلات التربيعية:

هناك عدة طرق لحل المعادلات التربيعية، وسوف يتم التعرض في هذا الفصل إلى طريقتين هما: الأول هي طريقة التحليل للعوامل، أما الثانية فهي الصيغة التربيعية (القانون) Quadratic Formula وهي ما تعرف بالجذر المميز.

2-1- الحل الجبري للدالة التربيعية:

أ- الطريقة الأولى: التحليل للعوامل:

حيث يتم الاعتماد على أساليب التحليل المتعارف عليها رياضياً إما بأخذ عامل مشترك أو بتحليل الفرق بين مربعين أو بتحليل المقدار الثلاثي؛ كما يلي:

مثال (1): $3x^2 - 9x = 0$

خطوات الحل: يأخذ عامل مشترك: 3X فإن:

$$3x\,(x - 3) = 0$$

يكون: إما $(x - 3) = 0$ أو $3x = 0$

$\therefore\ x = 3$ $\therefore\ x = 0$

وبذلك تكون نقاط الحل هي: $\{0, 3\}$.

مثال (2): $2x^2 - 18 = 0$

خطوات الحل:

$$2x^2 = 18$$
$$x^2 = 9$$
$$x = \pm\sqrt{9}$$

وبذلك فإن: $x = \pm 3$

مثال (3): $x^2 - 6x + 8 = 0$

خطوات الحل: يتم الحل عن طريق تحليل المقدار الثلاثي:

$$(x - 4)\,(x - 2) = 0$$

إما $(x - 2) = 0$ أو $(x - 4) = 0$

$\therefore\ x = 2$ $\therefore\ x = 4$

مثال (4): $3x^2 - 12x - 15 = 0$

خطوات الحل: بقسمة طرفي المعادلة على 3.

$$X^2 - 4x - 5 = 0$$

تم تحليل المقدار الثلاثي.

$$(x-5)\,(x+1)=0$$

إما $(x+1)=0$ أو $x-5=0$

$\therefore\ x=-1$ $\quad$ $\therefore\ x=5$

مثال (5): $x^2-6x+9=0$

خطوات الحل: يتم التحليل

$$(x-3)\,(x-3)=0$$

نجد أن:

$$x-3=0$$
$$x=3$$

مثال (6): $2x^2-5x+4=0$

خطوات الحل:

لا يمكن إجراء التحليل لهذه المسألة حيث أنه يصعب التحليل إلى العوامل الأولية، ولذا فإنه يمكن القول بأن هذه المعادلة ليس لها حل.

ب- الطريقة الثنائية: الحل باستخدام قانون المميز (النموذج التربيعي):

حيث أن الدالة التربيعية تكون على الشكل:

$$ax^2+bx+c=0$$

حيث أن: (a) , (b) , (c) ثوابت فإن:

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

مثال (1): باستخدام الجذر المميز حل المعادلة الآتية:

$$x^2-6x+8=0$$

خطوات الحل:

$$= \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4(1)(8)}}{2(1)}$$

$$= \frac{+6 \pm \sqrt{36 - 32}}{2}$$

$$= \frac{6 \pm \sqrt{4}}{2}$$

$$= \frac{6 \pm 2}{2}$$

x

إما

$$\frac{6 - 2}{2} = -2$$

أو

$$\frac{6 + 2}{2} = 5$$

قيم x هي: {2، 4}.

مثال (2) حل المعادلة الآتية باستخدام الجذر المميز:

$$3x^2 - 12x - 15 = 0$$

خطوات الحل: a = 3 , b = -12 , C = -15

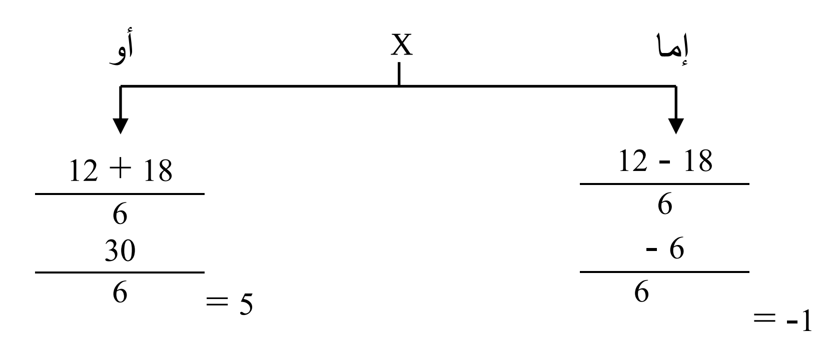
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-(-12) \pm \sqrt{(-12)^2 - 4(3)\,(-15)}}{2(3)}$$

$$= \frac{12 \pm \sqrt{144 + 180}}{6}$$

$$= \frac{12 \pm \sqrt{324}}{6}$$

$$= \frac{12 \pm 18}{6}$$



قيم x هي: {-1، 5}.

مثال (3): باستخدام الجذر المميز حل المعادلة.

$x^2 - 6x + 9 = 0$

خطوات الحل:

$\because \quad a = 1 \quad , \quad b = -6 \quad , \quad C = 9$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4(1)(9)}}{2(1)}$$

$$= \frac{6 \pm \sqrt{36 - 36}}{2}$$

$$= \frac{6 \pm \sqrt{0}}{2}$$

$$x = \frac{6}{2} = 3$$

$\therefore$ **المعادلة لها حل واحد هو X = 3**

مثال (4): باستخدام الجذر المميز حل المعادلة:

$2x^2 - 5x + 4 = 0$

خطوات الحل:

$\because \quad a = 2 \quad , \quad b = -5 \quad , \quad C = 4$

$$\because x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4(2)(4)}}{2(2)}$$

$$= \frac{5 \pm \sqrt{25 - 32}}{4}$$

$$\therefore \quad = \frac{5 \pm \sqrt{-7}}{4}$$

حيث أن القيمة أسفل الجذر هي قيمة سالبة، وأنه لا يمكن حساب الجذر لقيمة سالبة، وبالتالي فإن المعادلة ليس لها حل.

مما سبق يتضح لنا أن الدالة التربيعية عند حلها نواجه بإحدى الحالات الثلاثة:

1- إذا كانت قيمة المميز (القيمة أسفل الجذر) موجبة بمعنى أن $(b^2 - 4a\ c > 0)$ يكون للدالة حلان، كما في المثالين (1، 2).

2- إذا كان قيمة المميز (القيمة أسفل الجذر) تساوي صفراً بمعنى أن $(b^2 - 4a\ c = 0)$ يكون للدالة حل وحيد، كما في المثال (3).

3- إذا كانت قيمة المميز (القيمة أسفل الجذر) سالبة بمعنى أن $(b^2 - 4a\ c < 0)$ فإن الدالة ليس لها حل، كما في المثال رقم (4).

2-2- الحل البياني للدالة التربيعية:

حيث أنه من السهل تمثيل الدالة الخطية بيانياً، حيث أنه يكتفي بنقطتين ودائماً تعطينا خطوط مستقيمة، ولكن لرسم المعادلات التربيعية فإننا نحتاج إلى ما بين 5 إلى 10 نقاط حتى يكون الرسم معبراً عن شكل الدالة.

مثال(5): مثل الدالة التربيعية التالية بيانياً: $F(X) = 2X^2$

الحل: لرسم الدالة التربيعية بيانياً نفرض عدة قيم لـ x ثم قيم y المناظرة كما يلي:

عندما x = 0 فإن y = 0

عندما x = 1 فإن y = 2

عندما x = 2 فإن y = 8

عندما x = 3 فإن y = 18

عندما x = -1 فإن y = 2

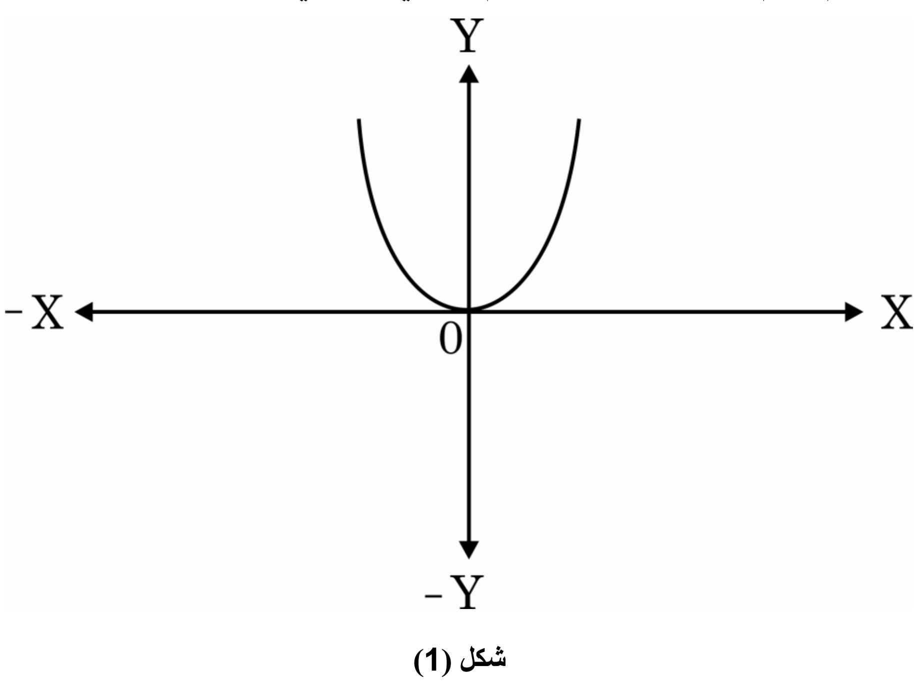
عندما x = -2 فإن y = 8

عندما x = -3 فإن y = 18

يتم وضع النقاط في الجدول التالي:

-3	-2	-1	0	1	2	3	X
18	8	2	0	2	8	18	Y

ويتم رسم هذه النقاط على الرسم البياني كما يلي:



شكل (1)

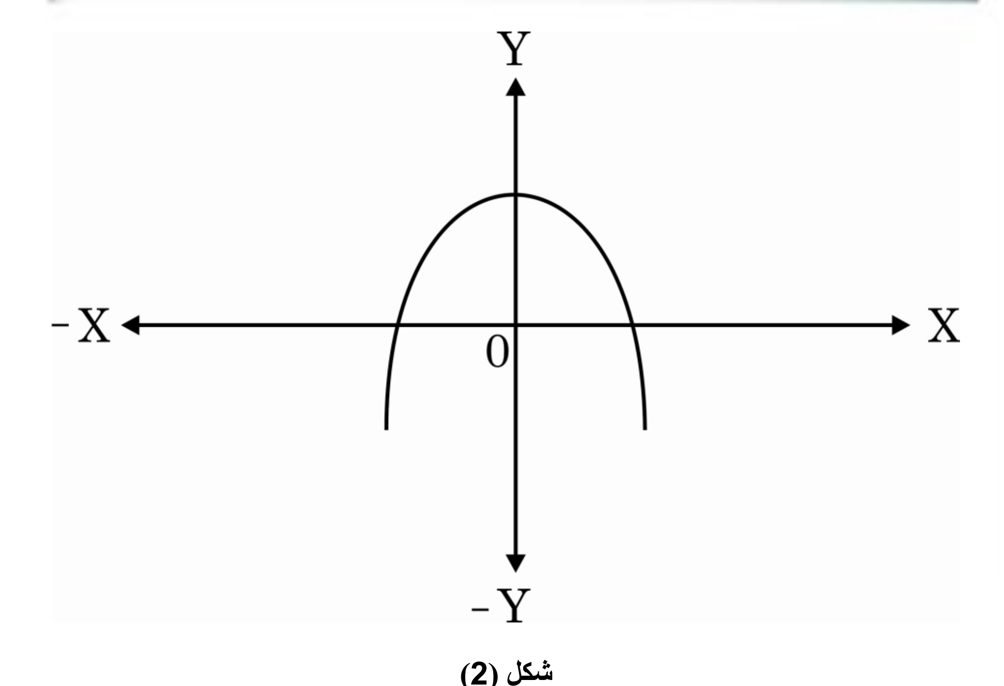
مثال (3): مثل الدالة التربيعية التالية بيانياً.

$$y = -2x^2 + 5$$

خطوات الحل:

لرسم الدالة التربيعية بيانياً يتم إيجاد عدة نقاط وذلك بفرض قيم لـ (x) ثم إيجاد قيم (y) المناظرة كما يلي:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	-13	3-	3	5	3	-3	-13



شكل (2)

يلاحظ من الشكلين السابقين ما يلي:

-تأخذ الدالة التربيعية شكل (∪) إذا كانت قيمة (a) معامل x^2 موجبة.

-تأخذ الدالة التربيعية شكل (∩) إذا كانت قيمة (a) معامل x^2 سالبة.

وبناء على ما سبق فإنه يمكن تمثيل الدالة التربيعية بإتباع الخطوات التالية:

الخطوة الأولى: تحديد شكل المنحنى الممثل للدالة التربيعية بناء على إشارة (a) معامل x^2. حيث أن المنحنى سيكون له شكل (∪) إذا كانت قيمة (a) موجبة ($a > 0$) بينما سيكون شكل المنحنى (∩) إذا كانت قيمة (a) سالبة ($a < 0$).

الخطوة الثانية: تحديد نقطة تقاطع المنحنى مع المحور الرأسي (العمودي y) وذلك بالتعويض عن قيمة $x = 0$ وبالتالي فإنه يتم الحصول على قيمة y، أي: $y = c$، حيث أن (c) هي قيمة ثابتة.

الخطوة الثالثة: تحديد نقاط تقاطع المنحنى مع المحور الأفقي (x) وذلك بالتعويض عن قيمة $y = 0$ فيكون لدينا المعادلة التالية $a x^2 + b x + c = 0$ ثم الحل باستخدام التحليل للعوامل أو باستخدام

الجذر المميز نحصل على قيم (x) التي تقطع المحور الأفقي، وهي (X_1، X_2).

الخطوة الرابعة: إيجاد أعلى نقطة أو أقل نقطة، حيث أن المنحنى يكون متماثل، فإن النقطة التي تمثل الحد الأقصى أو الحد الأدنى يتم إيجادها بأخذ متوسط قيمتي (x) السابقة إيجادهم في الخطوة السابقة وكما يلي.

$$\overline{X} = \frac{X_1 = X_2}{2}$$

ثم بالتعويض في المعادلة لإيجاد قيمة y.

مثال (7): ارسم الدالة التربيعية التالية بيانياً:

$$y = -x^2 + 8x - 12$$

خطوات الحل:

1- تحديد شكل المنحنى الممثل للدالة التربيعية وذلك بالنظر إلى إشارة (a) نجد أن (a) سالبة ($a < 0$) ولذا فإن المنحنى يأخذ شكل نهاية عظمى ($\cap$).

2- تحديد نقطة تقاطع المنحنى مع المحور الرأسي وذلك بوضع $x = 0$ نحصل على قيمة y، فإن ($y = 12$).

3- تحديد نقاط تقاطع المنحنى مع المحور الأفقي وذلك بوضع $y = 0$ ثم إيجاد قيم x.

$$-x^2 + 8x - 12 = 0$$

ثم الحل باستخدام التحليل للعوامل وكما يلي:

$$(x-2)\,(x-6) = 0$$

إما $x = 6$ أو: $x = 2$

أو يمكن الحل باستخدام الجذر المميز كما يلي:

$\therefore$ $a = -1$, $b = 8$, $C = -12$

$$\therefore x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-8 \pm \sqrt{(8)^2 - 4(-1)(-12)}}{2(-1)}$$

$$= \frac{-8 \pm \sqrt{64 - 48}}{-2}$$

$$= \frac{-8 \pm \sqrt{16}}{-2}$$

$$= \frac{-8 \pm 4}{-2}$$

$$\frac{-8 + 4}{-2} = \frac{-4}{-2} = 2$$

$$\frac{-8 - 4}{-2} = \frac{-12}{-2} = 6$$

4- تحديد نقطة النهاية العظمى وذلك بأخذ متوسط قيمتي x السابق إيجادهم في الخطوة السابقة.

$$\overline{X} = \frac{2+6}{2} = 4$$

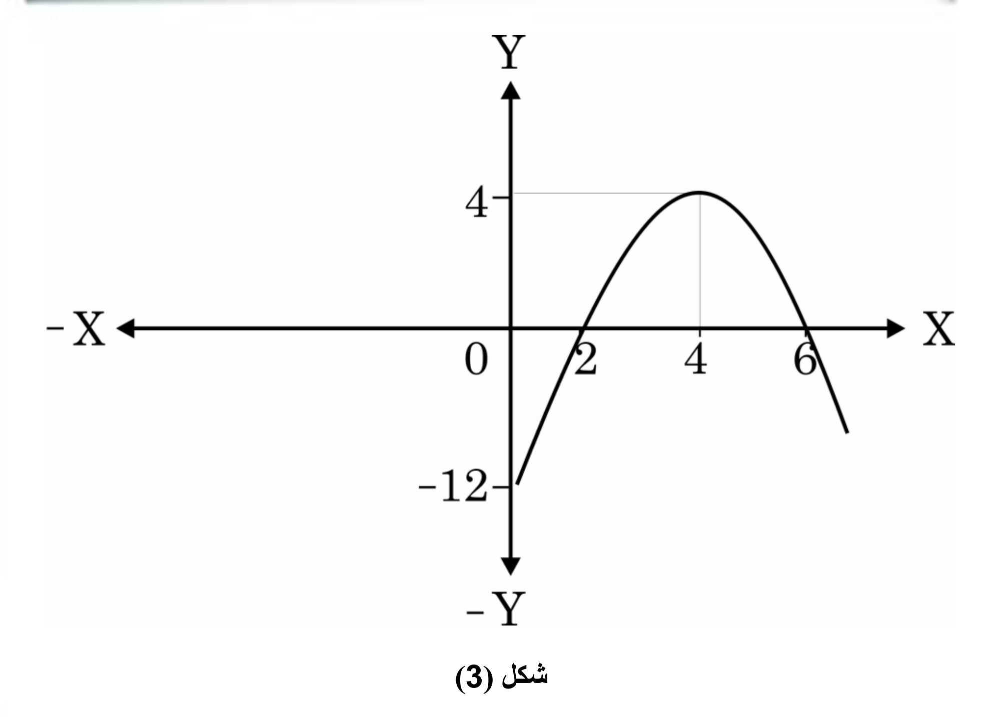
ثم بالتعويض في الدالة الأصلية نجد أن:

$$Y = -(4)^2 + 8(4) - 12$$
$$= -16 + 32 - 12$$
$$\therefore Y = 32 - 28 = 4$$

وبذلك تكون النقاط كما يلي:

x	0	2	6	4
y	-12	0	0	4

يكون الرسم كما يلي:



شكل (3)

3- تطبيقات اقتصادية على الدالة التربيعية

3-1- توازن السوق غير الخطي:

كثيراً ما يفترض أن دوال الطلب والعرض تكون خطية وبناء على ذلك فإنه يتم الاعتماد على الطرق الرياضية في حل المعادلات الخطية وكان من أهمها طريقة الحذف أو طريقة التعويض أو استخدام المحددات أو استخدام المصفوفات وذلك لحل معادلتي العرض والطلب والوصول إلى الوضع التوازني حيث يتم تحديد السعر التوازني والكمية التوازنية.

ولكن في حياتنا العملية كثيراً ما نجد بعض معادلات العرض والطلب غير الخطية ولذا فإننا سوف نستخدم أساليب الدالة التربيعية للتعامل مع الدوال غير الخطية للعرض والطلب بكل سهولة ويسر والأمثلة أدناه توضح ذلك.

مثال (1): أوجد التوازن في سوق أحد السلع إذا علمت أن دالتى العرض والطلب لسلعة ما كما يلي:

$$p = Q_S^2 + 14Q_S + 22$$

$$p = Q_d^2 - 10Q_d + 150$$

خطوات الحل:

عند التوازن فإن: $Q_s = Q_d = Q$

حيث أن:

Q_d ← تمثل الكمية المطلوبة.

Q_s ← تمثل الكمية المعروضة.

Q ← تمثل الكمية التوازنية.

وبذلك فإنه عند التوازن تصبح دالتى العرض والطلب كما يلي:

$p = \quad Q2 + 14Q + 22$

$p = - Q2 - 10Q + 150$

وبذلك فإن عند التوازن يكون:

$Q^2 + 14Q + 22 = - Q^2 - 10Q + 150$

وذلك لأن كلا الطرفين مساوياً (P)

وبإعادة ترتيب المعادلة وبمساواتها بالصفر نحصل على:

$2Q^2 + 24Q - 128 = 0$

وهي معادلة غير خطية (تربيعية) ويتم حلها إما باستخدام التحليل للعوامل أو باستخدام الجذر المميز وكما يلي:

$\therefore$ $a = 2$, $b = 24$, $C = -128$

$$\therefore Q = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-24 \pm \sqrt{(24)^2 - 4(2)(-128)}}{2(2)}$$

$$= \frac{-24 \pm \sqrt{576 + 1024}}{4}$$

$$= \frac{-24 \pm \sqrt{1600}}{4}$$

$$= \frac{-24 \pm 40}{4}$$

Q

$Q = \frac{-24 + 40}{4}$	$Q = \frac{-24 + 40}{4}$
$Q = \frac{64}{4}$	$Q = \frac{16}{4}$
$Q = -4$ مرفوض وذلك لعدم وجود كمية سالبة من السلعة	$Q = 4$

وبذلك فإن الكمية التوازنية تساوي (4) ولذا فإن السعر التوازني يمكن إيجاده بالتعويض في معادلة الطلب أو معادلة العرض كما يلي:

في دالة العرض:

$$p = Q^2 + 14Q + 22$$

$$p = (4)^2 + 14(4) + 22 = 94$$

أو دالة الطلب:

$$p = Q^2 - 10Q + 150$$

$$p = (4)^2 - 10(4) + 150 = 94$$

وبذلك فإن السعر التوازني يساوي 94.

مثال (2): إذا كان دالتى العرض والطلب لسلعة ما في أحد الأسواق كما يلي:

$$p = -Q_d^2 - \quad Q_d + 11$$

$$p = Q_s^2 - 0{,}5Q_s + 2$$

المطلوب: أوجد السعر التوازني والكمية التوازنية

خطوات الحل:

بما أنه عند التوازن فإن: Qd = Qs = Q

ولذا فإنه يمكن التعبير عن معادلتي العرض والطلب كما يلي:

$$p = -Q^2 - \quad Q + 11$$

$$p = Q^2 - 0{,}5Q + 2$$

وبحل المعادلتين معاً يكون:

$-Q^2 - Q + 11 = Q^2 - 0{,}5Q + 2$

$-2Q^2 - 0{,}5Q + 9 = 0$

ويمكن التخلص من الكسر العشري بضرب المعادلة × 2.

$-4Q^2 - Q + 18 = 0$

ثم الحل باستخدام الجذر المميز كما يلي:

C = 18 , b = -1 , a = -4

$$Q = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4(-4)\,(18)}}{2(-4)}$$

$$= \frac{1 \pm \sqrt{1 + 288}}{-8}$$

$$= \frac{1 \pm \sqrt{289}}{-8}$$

$$= \frac{1 \pm 17}{-8}$$

Q

$$\frac{1 + 17}{-8} = \frac{18}{-8} = -2{,}22$$

$$\frac{-171}{-8} = \frac{-16}{-8} = 2$$

مرفوض لأنه لا يمكن
أن تكون الكمية بالسالب

وبذلك فإن الكمية التوازنية = 2.

يتم التعويض في إحدى معادلتي العرض والطلب عن الكمية التوازنية للوصول إلى السعر التوازني كما يلي:

دالة الطلب:

$$p = -Q^2 - Q + 11$$
$$= -(2)^2 - 2 + 11 = 5$$

أو دالة العرض:

$$p = Q^2 - 0,5\,Q + 2$$
$$= (2)^2 - 0,5(2) + 2 = 5$$

وذلك فإن الكمية التوازنية هي: $Q = 2$

والسعر التوازني هو: $P = 5$

3-2- دوال الإيراد الكلي والتكاليف الكلية والربح:

قد تعرضنا في الفصل السابق -تحليل التعادل- لدوال الإيراد الكلي ودوال التكاليف الكلية ودالة الربح وكيفية تحديد نقطة التعادل، ولكن ذلك إذا كانت دوال الإيراد والتكاليف تأخذ شكل دالة خطية من الدرجة الأولى، ولكن إذا كانت دوال الإيراد والتكاليف والربح تأخذ شكل دوال غير خطية فإن التحليل السابق لا يصلح، ولذا فإننا نلجأ لاستخدام طرق أكثر تقدماً، وفي هذا الفصل سوف نقوم بتحديد حجم الإنتاج الذي يحقق التعادل وحجم الإنتاج الذي يحقق أقصى ربح وكذلك حجم الإنتاج الذي يحقق أقل تكلفة إذا كانت دوال الإيراد والتكلفة والربح من الدرجة الثانية (دوال تربيعية)، ولتوضيح ذلك نأخذ الأمثلة أدناه:

مثال (1): إذا كانت التكلفة الثابتة (FC) تقدر بـ (96) وكانت التكلفة المتغيرة للوحدة الواحدة على الصورة التالية $VC = 48 + Q$ وكانت دالة الطلب على السلعة على الصورة التالية: $P = 80 - Q$.

المطلوب:

1- استنتاج كل من دالة الإيراد الكلي (TR) ودالة التكلفة الكلية (TC) ودالة الربح (π) بالنسبة لحجم الإنتاج Q.

2- ارسم دالة الربح (π) بالنسبة لحجم الإنتاج ومن الرسم أوجد:

- حجم الإنتاج الذي يحقق التعادل.

- حجم الإنتاج الذي يحقق أقصى ربح ممكن (حجم الإنتاج الأمثل).

3- عند حجم الإنتاج الأمثلة أوجد TR , TC , π , VC , TVC.

خطوات الحل:

- دالة الإيراد الكلي (TR) هي:

$$TR = P \times Q$$
$$= (80 - Q)\,Q$$
$$= 80Q - Q^2$$

- دالة التكاليف الكلية (TC) هي:

$$\therefore TR = FC + TVC$$
$$= FC + VC\,(Q)$$
$$= 96 + (48 - Q)\,Q$$
$$= 96 + 48Q + Q^2$$

-دالة الربح (π) هي:

$$\pi \;= TR - TC$$
$$= 80\,Q - Q^2 - 96 - 48Q - Q^2$$
$$\pi \;= 2\,Q^2 + 32Q - 96$$

يتم رسم دالة الربح كما سبق حيث أن:

$\pi = -2Q^2 + 32Q - 96$

- شكل المنحنى الممثل للدالة يأخذ الشكل ∩ حيث أن إشارة a سالبة ($a < 0$).
- تحديد نقطة تقاطع المنحنى مع المحور الرأسي وذلك بوضع $Q = 0$ فتكون: $\pi = -96$
- تحديد نقاط تقاطع المنحنى مع المحور الأفقي وذلك بوضع $\pi = 0$ يكون لدينا $-2\,Q^2 + 32Q - 96 = 0$ ثم الحل باستخدام الجذر المميز:

C = -96 , b = 32 , a = -2

$$Q = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$Q = \frac{-32 \pm \sqrt{(32)^2 - 4(-2)(-96)}}{2(-2)}$$

$$= \frac{-32 \pm \sqrt{1024 - 768}}{-4}$$

$$= \frac{-32 \pm \sqrt{256}}{-4}$$

$$= \frac{-32 \pm 16}{-4}$$

Q

$$\frac{-32 - 16}{-4} \quad \frac{-48}{-4} \quad = 12$$

$$\frac{-32 + 16}{-4} \quad \frac{-16}{-4} \quad = 4$$

- تحديد نقطة النهاية العظمى وذلك بأخذ متوسط قيمتي x السابق إيجادهم:

$$\bar{x} = \frac{12 + 4}{2} = 8$$

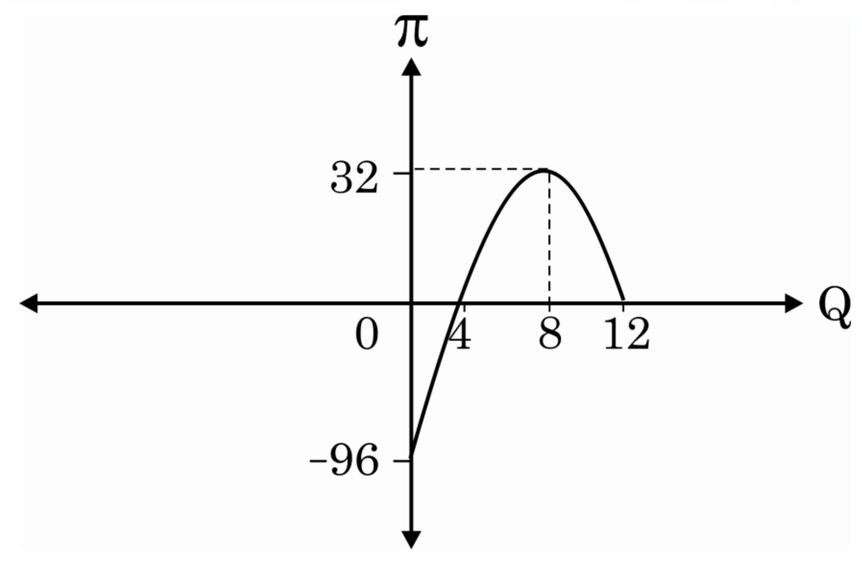
ثم بالتعويض في الدالة الأصلية عن Q=8 نحصل على قيمة π:

$$\pi = -2\,(8)^2 + 32(8) - 96 = 32$$

وبذلك فإن النقاط هي:

Q	0	4	12	8
π	-96	0	0	32

ثم الرسم البياني:



شكل (4)

من الرسم يتضح أن حجم الإنتاج الذي يحقق التعادل أي أن:

$\pi = 0$ أو أن $TR = TC$

هو (4، 12) بينما حجم الإنتاج الأمثل الذي يحقق أقصى ربح هو (8) ويكون الربح يساوي 32.

عند حجم الإنتاج الأمثل (Q = 8) فإن:

- (TR) الإيراد الكلي:

$$TC = 80Q - Q^2$$
$$= 80(8) - (8)^2 = 576$$

- (TC) التكلفة الكلية:

$$TC = 96 + 48Q + Q^2$$
$$TC = 96 + 48(8) + (8)^2 = 544$$

بما أن (π) الربح الكلي:

$$\pi = TR - TC$$
$$\therefore \pi = 576 - 544 = 32$$

أو: بالتعويض في دالة الربح نحصل على:

$$\pi = -2Q^2 + 32Q - 96$$
$$= -2(8)^2 + 32(8) - 96 = 32$$

- (VC) التكلفة المتغيرة للوحدة:

$$VC = 48 + Q$$
$$= 48 + 8 = 56$$

- (TVC) التكلفة المتغيرة الكلية:

$$TVC = VC\ (Q)$$
$$= (48 + Q)\ Q$$
$$= (48 + 8)\ 8 = 448$$

مثال (2): إذا كانت دالة الطلب لسلعة ما على الصورة التالية:

$$P = 54 - 3Q$$

وكانت دالة التكلفة المتوسطة على الصورة:

$$AC = 22 - Q + \frac{78}{Q}$$

المطلوب:

1-أوجد دالة الإيراد الكلي (TR)، دالة التكلفة الكلية (TC) ودالة الربح (π) بالنسبة لحجم الإنتاج.

2- ارسم دالة الربح ومن الرسم حدد:

- حجم الإنتاج الذي يحقق التعادل.
- حجم الإنتاج الأمثل الذي يحقق أقصى ربح ممكن.

3- عند حجم الإنتاج الأمثل أوجد كل من:

TVC , VC , AC , TC , TR , P

خطوات الحل:

بما أن دالة الإيراد الكلي (TR) هي:

$$TR = p \times Q = (54 - 3Q)Q$$
$$= 54Q - 3Q^2$$

بما أن دالة التكلفة الكلية (TC) هي:

$$TC = Ac\ (Q)$$
$$= (22 - Q + \frac{78}{Q})\ Q$$
$$= 22Q - Q^2 + 78$$
$$\pi = TR - TC$$
$$= 54Q - 3Q^2 - 22Q + Q^2 - 78$$
$$= -2Q^2 + 32Q - 78$$

ولرسم دالة الربح نتبع الخطوات التالية:

$$\therefore \pi = -2Q^2 + 32Q - 78$$

أ- تحديد شكل المنحنى الممثل للدالة ويأخذ الشكل ($\cap$) حيث أن إشـارة (a) سالبة ($a < 0$).

ب- تحديد نقطة تقاطع المنحنى مع المحور الرأسي بوضع $Q = 0$ نجد أن:

$$\pi = -78$$

ج- تحديد نقـاط تقـاطع المنحنـى مـع المحـور الأفقي وذلـك بوضـع $\pi = 0$ يكون لدينا:

$$-2Q^2 + 32Q - 78 = 0$$

ثم الحل باستخدام الجذر المميز:

C = -78 , b = 32 , a = -2

ثم بالتعويض:

$$Q = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$Q = \frac{-32 \pm \sqrt{(32)^2 - 4(-2)(-78)}}{2(-2)}$$

$$= \frac{-32 \pm \sqrt{1024 - 624}}{-4}$$

$$= \frac{-32 \pm \sqrt{400}}{-4}$$

$$= \frac{-32 \pm 20}{-4}$$

Q

$$\frac{-32 - 20}{-4} = \frac{-52}{-4} = 13$$

$$\frac{-32 + 20}{-4} = \frac{-12}{-4} = 3$$

د- تحديد النقطة التي تمثل النهاية العظمى وذلك بأخذ متوسط قيمتي Q السابقة أي:

$$\bar{x} = \frac{13 + 3}{2} = 8$$

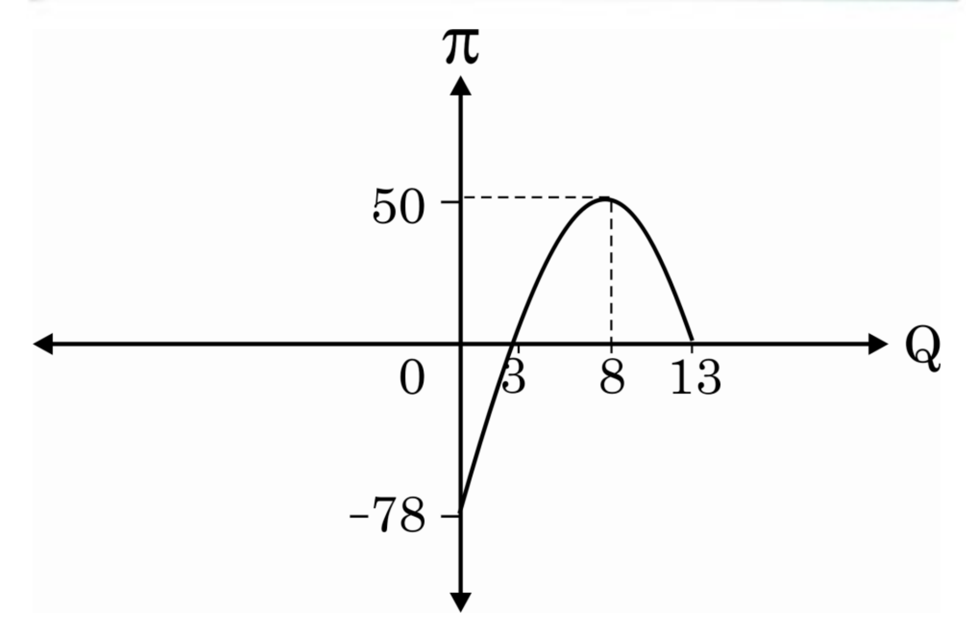
بالتعويض في الدالة نحصل على قيمة (π).

$$\pi = -2(8)^2 + 32(8) - 78 = 50$$

تكون نقاط الرسم هي:

Q	0	3	13	8
π	-78	0	0	50

ثم الرسم:



شكل (5) يوضح أعظم ربح للدالة التربيعية

من الرسم السابق يتضح أن:

- حجم الإنتاج الذي يحقق التعادل هو (13 ، 3).

-حجم الإنتاج الأمثل الذي يحقق أقصى ربح هو (8).

- أقصى ربح هو 50 = π.

-عند حجم الإنتاج الأمثل فإن P:

$$P = 54 - 3(8) = 30$$

- عند حجم الإنتاج الأمثل فإن TR:

$$TR = 54Q - 3(Q)^2$$
$$= 54(8) - 3(8)^2 = 240$$

- عند حجم الإنتاج الأمثل فإن:

$$TC = 22Q - (Q)^2 + 78$$
$$= 22(8) - (8)^2 + 78 = 190$$

- عند حجم الإنتاج الأمثل فإن الربح π هو:

$$\pi = TR - TC$$
$$= 240 - 190 = 50$$

أو

$$\pi = -2Q^2 + 32Q - 78$$
$$= -2(8)^2 + 32(8) - 78 = 50$$

- عند حجم الإنتاج الأمثل فإن AC هي:

$$AC = 22 - Q + \frac{78}{Q}$$
$$= 22 - 8 + \frac{78}{8} = 23.75$$

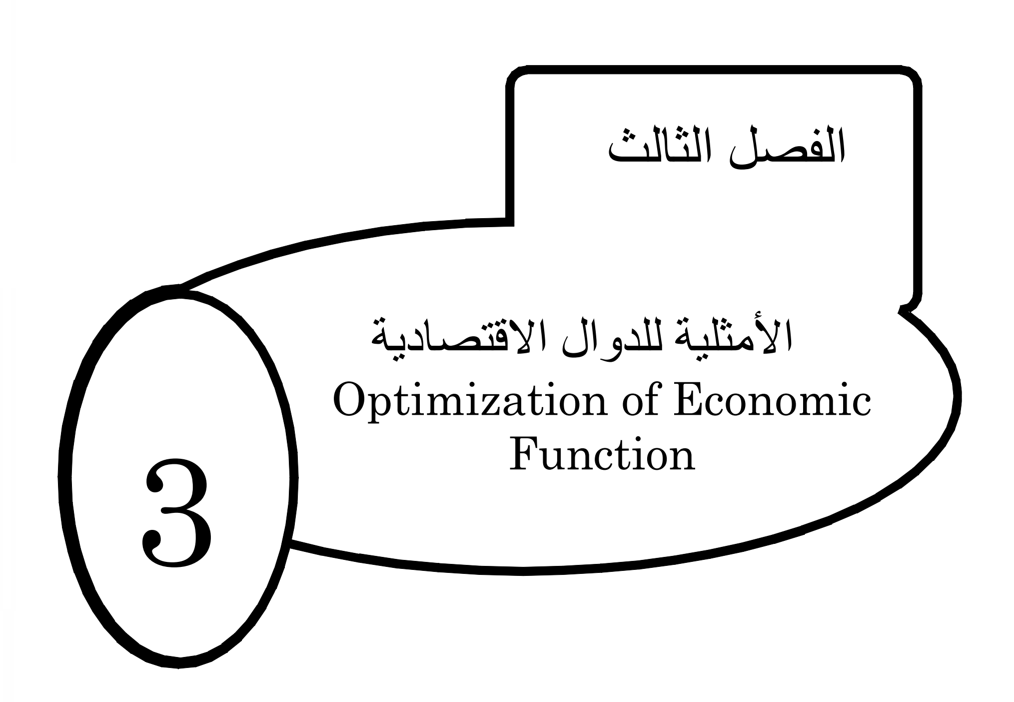
- عند حجم الإنتاج الأمثل فإن VC هي:

$$VC = 22 - Q = 22 - 8 = 14$$

- عند حجم الإنتاج الأمثل فإن TVC:

$$TVC = 22Q - Q^2 = 22\,(8) - (8)^2 = 112$$

الفصل الثالث
الأمثلية للدوال الاقتصادية
Optimization of Economic Function



الفصل الثالث
الأمثلية للدوال الاقتصادية
Optimization of Economic Functions

1- مقدمــة:

سوف نركز اهتمامنا في هذا الفصل على الوضع الأمثل للوحدة الاقتصادية. حيث تسعى الوحدة الاقتصادية إلى الوصول إلى ذلك الوضع الأمثل، ومن أهم المعايير المعروفة في علم الاقتصاد للوصول إلى الوضع الأمثل هو هدف التعظيم، سواء كان تعظيم الربح أو تعظيم منفعة المستهلك أو تعظيم الإيراد، وأحياناً يكون الهدف تخفيض التكاليف.

ويقال أن للدالة $y = F(x)$ نهاية عظمى عند النقطة $x = x_1$ إذا كانت قيمة الدالة عند النقطة x_1 أكبر من قيمتها عند كل نقطة في مجال معين يضم النقطة x_1، ويقال أن للدالة $y = F(x)$ نهاية صغرى عند النقطة $x = x_2$ إذا كانت قيمة الدالة عند النقطة x_2 أصغر من قيمتها عند كل نقطة أخرى في مجال معين يضم النقطة x_2.

2- الأمثلية للدوال الاقتصادية ذات المتغير الواحد:

تظهر أهمية دراسة الأمثلية للدوال الاقتصادية ذات المتغير الواحد من خلال التحليل الساكن المقارن، حيث أن هذا التحليل يقوم على أساس مقارنة الدالة قبل وبعد التغير، ومن الدوال التي تنطبق عليها هذه الحالة، دالة الإيراد الكلي، دالة التكلفة الكلية، دالة التكلفة المتوسطة، دالة الربح، دالة الإنتاج وتعتمد الأمثلية للدوال الاقتصادية على دراسة المشتقات الأولى والثانية، ومن ثم شروط النهايات العظمى والصغرى.

وفيما يلي توضيح شروط النهايات العظمى والصغرى للدوال ذات المتغير الواحد كما يلي:

2-1- الشرط اللازم للنهايات: (Necessary Conditon)

- إذا كانت قيمة دالة ما $y = F(x)$ عند النقطة $x = x_1$ نهاية عظمى أو نهاية صغرى فإن المشتقة الأولى للدالة (المعامل التفاضلي الأول) عند هذه النقطة يساوي صفراً. أي أن:

$$\frac{dy}{dx} = 0$$

أو:

$$F'(X_1) = 0$$

2-2- الشرط الكافي للنهايات: (Sufficient Condition)

إذا كانت المشتقة الأولى للدالة $y = F(x)$ تساوي صفراً (الشرط اللازم للنهايات) كما يلي:

$$\frac{dy}{dx} = 0$$

فإن الدالة يكون لها نهاية عظمى عند النقطة $x = x_1$ إذا كانت المشتقة الثانية للدالة أقل من الصفر (سالبة).

$$\frac{d^2y}{dx^2} < 0$$

وتكون الدالة عند نهاية صغرى إذا كانت المشتقة الثانية أكبر من الصفر (موجبة) كما يلي:

$$\frac{d^2y}{dx^2} > 0$$

ويمكن تلخيص ما سبق فيما يلي:

إذا كان لدينا الدالة: $y = F(x)$

فإن هذه الدالة تكون عند نهاية عظمى إذا ما توافر الشرطان التاليان:

1- المشتقة الأولى تساوي صفر أي أن:

$$\frac{dy}{dx} = 0 \quad \text{(وهو الشرط اللازم)}$$

2- المشتقة الثانية سالبة أي أن:

$$\frac{d^2y}{dx^2} < 0 \quad \text{(وهو الشرط الكافي)}$$

وتكون الدالة $y = f(x)$ عند نهاية صغرى إذا ما توافر الشرطان التاليان:

1- المشتقة الأولى للدالة تساوي صفراً أي أن:

$$\frac{dy}{dx}=0$$ (وهو الشرط اللازم)

2- المشتقة الثانية للدالة موجبة أي أن:

$$\frac{d^2y}{dx^2}>0$$ (وهو الشرط الكافي)

ويمكن وضع ذلك في الجدول التالي:

الشروط	نهاية عظمى	نهاية صغرى
الشرط اللازم Necessary Condition	$\frac{dy}{dx}=0$	$\frac{dy}{dx}=0$
الشرط الكافي Sufficient Condition	$\frac{d^2y}{dx^2}<0$	$\frac{d^2y}{dx^2}>0$

3- تطبيقات رياضية على الدوال الاقتصادية ذات المتغير الواحد:

3-1- دالة الإيراد الكلي ودالة التكلفة الكلية ودالة الربح:

مثال (1) إذا كانت دالة الطلب لسلعة ما على الصورة التالية:

$$p=-3Q+24$$

وكانت دالة التكلفة الكلية على الصورة:

$$TC=Q^3-3Q^2-24Q+100$$

المطلوب:

1- أوجد حجم الإنتاج الذي يحقق أقصى إيراد كلي ممكن.

2- أوجد حجم الإنتاج الذي يحقق أقل تكلفة كلية ممكنة.

3- أوجد حجم الإنتاج الذي يحقق أقصى ربح ممكن.

4- عند حجم الإنتاج الأمثل الذي يعظم الربح أوجد قيمة كل من التكلفة الحدية والإيراد الحدي.

خطوات الحل:

1- دالة الإيراد الكلي TR هي:

$$TR = P \times Q$$
$$= (-3Q + 24)\, Q$$
$$TR = -3Q^2 + 24\, Q$$

- إيجاد المشتقة الأولى:

$$\frac{dTR}{dQ} = -6Q + 24$$

- مساواة المشتقة الأولى بالصفر لإيجاد قيم المتغير

$$(\frac{dTR}{dQ} = 0)$$
$$-6Q + 24 = 0$$
$$-6Q = -24$$
$$Q = \frac{-24}{-6} = 4$$

- إيجاد المشتقة الثانية لاختيار الإشارة وكما يلي:

$$\frac{d^2TR}{dQ^2} = -6$$

- نجد أن قيمة المشتقة الثانية إشارتها سالبة وبذلك فإنه يكون لدالة الإيراد الكلي نهاية عظمى عندما (Q = 4).

2- دالة التكلفة الكلية (TC) هي:

$$TC = Q^3 - 3Q^2 - 24Q + 100$$

- إيجاد المشتقة الأولى: $\frac{dTC}{dQ} = 3Q^2 - 6Q + 24$

- مساواة المشتقة الأولى بالصفر وذلك لإيجاد قيمة المتغير.

$$\frac{dTC}{dQ} = 0$$
$$3Q^2 - 6Q - 24' = 0$$

ثم الحل باستخدام الجذر المميز أو باستخدام التحليل للعوامل.

$$Q = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$Q = \frac{-(-1)^6 \pm \sqrt{(-6)^2 - 4(3)(-24)}}{2 \times 3}$$

$$= \frac{6 \pm \sqrt{36 + 288}}{6}$$

$$= \frac{6 \pm \sqrt{324}}{6}$$

$$= \frac{6 \pm 18}{6}$$

Q

$$\frac{6 + 18}{6} = \frac{24}{6} = 4$$

$$\frac{-186}{6} = \frac{-12}{6} = -2$$

مرفوض لأن قيمة Q لا يمكن أن تكون سالبة

- إيجاد المشتقة الثانية لاختيار الإشارة وكما يلي:

$$\frac{d^2TC}{dQ^2} = 6Q - 6$$

- بالتعويض في المشتقة الثانية عن قيمة Q السابق إيجادها نجد أن:

$$TC'' = 6(4) - 6 = 18$$

نجد أن المشتقة الثانية TC'' موجبة وبذلك تتحقق أقل تكلفة عندما (Q = 4).

3- دالة الربح π هي:

$$\pi = TR - TC$$

$$= 24Q - 3Q^2 - Q^3 + 3Q^2 + 24Q - 100$$

$$\therefore \pi = -Q^3 + 48Q - 100$$

- إيجاد المشتقة الأولى $\pi' = -3Q^2 + 48$

-مساواة المشتقة الأولى بالصفر $(\pi' = 0)$ لإيجاد قيم المتغير.

$$= -3Q^2 + 48 = 0$$

$$= -3Q^2 = 48$$

$$Q^2 = \frac{-48}{-3} = 16$$

$$Q = \sqrt{16} = \pm 4$$

تهمل القيمة السالبة وبذلك فإن: Q = 4

- إيجاد المشتقة الثانية π'' كما يلي:

$$\pi'' = 6Q$$

- بالتعويض عن قيمة Q السابق إيجادها في المشتقة الثانية نجد أن:

$$\pi'' = -6(4) = -24$$

نجد أن المشتقة الثانية سالبة وبذلك تتحقق النهاية العظمى للربح عندما (Q = 4).

4- عند حجم الإنتاج الأمثل الذي يحقق أقصى ربح يتم إيجاد الإيراد الحدي والتكاليف الحدية.

-الإيراد الحدي (MR) يمثل المشتقة الأولى لدالة الإيراد الكلي بالنسبة لحجم الإنتاج.

عندما Q = 4 فإن: $(MR) = \frac{dTR}{dQ}$ الإيراد الحدي

$$MR = 24 - 6Q$$

$$MR = 24 - 6(4) = 0$$

-التكلفة الحدية (MC) تمثل المشتقة الأولى لدالة التكلفة الكلية بالنسبة لحجم الإنتاج.

عندما Q = 4 فإن: $(MC) = \frac{dTC}{dQ}$ التكلفة الحدية

$$MC = 3Q^2 - 6Q - 24$$

$$MC = 3(4)^2 - 6(4) - 24 = 0$$

وبذلك نجد أن عند حجم الإنتاج الأمثل هو الذي يحقق أقصى ربح ممكن نجد أن الإيراد الحدي يساوي التكلفة الحدية أي أن: $MR = MC$

2-3- دالة التكلفة المتوسطة (AC)

مثال(1): إذا كانت التكلفة الثابتة بإحدى الشركات هي 100 = FC ودالة التكلفة المتغيرة للوحدة الواحدة هي:

$$VC = 0,01Q - 0,8$$

المطلوب: أوجد حجم الإنتاج الذي يحقق أقل تكلفة متوسطة ممكنة ثم أوجد عند هذا الحجم من الإنتاج كل من AC , MC.

خطوات الحل:

-التكلفة الكلية TC هي:

$$TC = FC + TVC$$

$$\therefore \quad = 100 + (0,01Q - 0,8)\, Q$$

$$\therefore TC = 100 + 0,01Q^2 - 0,8Q$$

-التكلفة المتوسطة Ac هي:

$$AC = \frac{TC}{Q} = \frac{100 + 0{,}01Q^2 - 0{,}8Q}{Q}$$

$$AC = \frac{100}{Q} + 0{,}01Q - 0{,}8$$

خطوات الحل:

-إيجاد المشتقة الأولى: $AC' = \frac{-100}{Q2} + 0{,}01$

- مساواة المشتقة الأولى بالصفر $(Ac' = 0)$ لإيجاد قيمة المتغير.

$$\frac{-100}{Q^2} + 0{,}01 = 0$$

$$\frac{-100}{Q^2} = -0{,}01$$

بإجراء الضرب التبادلي:

$$-0{,}01Q^2 = -100$$

$$Q^2 = \frac{-100}{-0{,}01} = 10000$$

$$Q = \sqrt{10000} = 100$$

-إيجاد المشتقة الثانية: AC''

$$AC'' = \frac{200}{Q^3}$$

بالتعويض عن قيمة Q السابق إيجادها نجد أن المشتقة الثانية:

$$AC'' = \frac{200}{(100)^3} = \frac{200}{1000000} = ,0002$$

نجد أن إشارة المشتقة الثانية موجبة وبذلك تتحقق أقل تكلفة عندما Q = 100

- عندما Q = 100 فإنه يتم حساب كل من MC, AC

$$(AC) = \frac{100}{Q} + 0{,}01Q - 0{,}8$$

(التكلفة المتوسطة)

$$= \frac{100}{100} + ,01\,(100) - 0{,}8$$

$$= 1 + 1 - ,8 = 1{,}2$$

$$(MC) = \frac{dTc}{dQ}$$

(التكلفـــــــــــة

$$= \ ,02\,Q - 0{,}8$$

$$= ,02(100) - ,8$$

$$= 2\ - ,8 = 1{,}2$$

الحدية)

وبذلك فإنه عند حجم الإنتاج الذي يحقق أقل تكلفة متوسطة فإن التكلفة المتوسطة تساوي التكلفة الحدية أي أن: AC = MC.

3-3- دولة الإنتاج (Q):

مثال (1): إذا كانت دالة الإنتاج بإحدى الشركات على الصورة التالية:

$Q = 3L^2 - 0{,}1L^3$

حيث أن L: عدد العاملين

Q: كمية الإنتاج

المطلوب: أوجد عدد العاملين الذي يجعل الإنتاج أكبر ما يمكن.

خطوات الحل:

دالة الإنتاج (Q) هي:

$Q = 3L^2 - 0{,}1L^3$

- إيجاد المشتقة الأولى Q' وهي:

$$Q' = \frac{dQ}{dL} = 6L - ,3L^2$$

-مساواة المشتقة الأولى بالصفر لإيجاد قيم المتغير.

$Q' = 0$

بالتعويض: $6L - ,3L^2 = 0$

إذن : $L(6 - ,3L) = 0$

إما : $(6 - ,3L) = 0$ أو $L = 0$

$6 = 0.3L$

$\therefore \quad L = \frac{6}{,3} = 20$

-إيجاد المشتقة الثانية: $\therefore Q'' = 6 - 0.6L$

بالتعويض في المشتقة الثانية عن قيمة Q نجد أنه عندما Q20 =

$Q'' = 6 - 0.6(20) = -6$

أي أن نوع النهاية هي: سالبة نهاية عظمى.

عندما Q = 0

فإن $Q'' = 6 - ,6(0) = 6$

أي أن نوع النهاية هي: موجبة ← نهاية صغرى ← مرفوض

نجد أن عندما Q = 0 فإن قيمة المشتقة الثانية موجبة مما يعني أن هناك نهاية صغرى لدالة الإنتاج وهذا الحل مرفوض.

وبذلك فإن عدد العاملين الذي يحقق أقصى إنتاجية عندما L = 20 حيث أن قيمة المشتقة الثانية سالبة وهي نهاية عظمى.

مثال (2): إذا كانت دالة الإنتاج بإحدى الشركات على الصورة التالية:

$Q = 3L^2 - 0,1L^3$

حيث أن L: عدد العاملين.

Q: حجم الإنتاج

المطلوب: أوجد عدد العاملين الذي يجعل متوسط إنتاجية العامل (APL) أكبر ما يمكن، وعند هذا العدد من العاملين أوجد قيمة كل من MPL , APL

حيث أن **Average Productivity of Labout = APL**

Marginal Productivity of Labout = MPL

خطوات الحل:

∵دالة الإنتاج هي: $Q = 3L^2 - 0{,}1L^3$

فإن الإنتاجية المتوسطة للعامل (APL) على الصورة:

$$APL = \frac{\text{دالة الإنتاج}}{\text{عدد العاملين}} = \frac{Q}{L}$$

وبالتعويض فإن:

$$APL = \frac{3L^2 - 0{,}1L^3}{L}$$

$$\therefore APL = 3L - 0{,}1L^2$$

ثم تطبيق خطوات الحل:

- إيجاد المشتقة الأولى APL كما يلي:

$$APL' = 3 - 0{,}2L$$

- مساواة المشتقة الأولى بالصفر (APL') أي أن:

$$3 - 0{,}2L = 0$$
$$3 = ,2L$$
$$L = \frac{3}{,2} = 15$$

- إيجاد المشتقة الثانية APL'' كما يلي:

$$APL'' = -0{,}2$$

حيث أن قيمة المشتقة الثانية سالبة ($APL < 0$) فإنه يكون هناك نهاية عظمى أي أن عدد العاملين الذي يجعل متوسط إنتاجية العامل أكبر ما يمكن هو $L = 15$.

- وعندما $L = 15$ فإن:

• الإنتاجية المتوسطة للعامل (APL) هي:

$$APL = 3\,(15) - 0{,}1(15)^2$$
$$= 45 - 22{,}5 = 22{,}5$$

• الإنتاجية الحدية للعامل (MPL) هي المشتقة الأولى لدالة الإنتاج بالنسبة لعدد العاملين.

$$MPL = \frac{dQ}{dL}$$

$$MPL = 6L - 0{,}3L^2$$

$$= 6(15) - 0{,}3(15)^2$$

$$\therefore MPL = 90 - 67{,}5 = 22{,}5$$

وهذا يعني أنه عند عدد العاملين الذي يعظم متوسط إنتاجية العامل (يجعل متوسط إنتاجية العامل أكبر ما يمكن) فإن الإنتاجية المتوسطة تساوي الإنتاجية الحدية APL = MPL

4- الأمثلية للدوال الاقتصادية متعددة المتغيرات:

كثيراً من الدوال الاقتصادية ما ترتبط بأكثر من متغير، فعلى سبيل المثال الكمية المطلوبة من السلعة لا ترتبط بسعر السلعة الأصلية فحسب وإنما ترتبط بأسعار السلع الأخرى سواء كانت بديلة أو مكملة، بالإضافة إلى دخل المستهلك وذوق المستهلك، وبالتالي نجد أن الدالة تكون على الصورة التالية:

$$Q_a = F(P_a, P_b, Y, T)$$

حيث أن:

Q_a: الكمية المطلوبة من السلعة (a)

P_a: سعر السلعة (a)

P_b: سعر السلع الأخرى

Y: دخل المستهلك

T: ذوق المستهلك

لنفرض أننا لدينا الدالة التالية $Z = f(x, y)$، حيث أن x , y متغيران مستقلان، ولكي تكون هذه الدالة عند نهايتها العظمى أو الصغرى يجب توافر الشروط التالية:

1- الشرط اللازم: المشتقات الجزئية الأولى لهذه الدالة يجب أن تساوي صفراً، أي أن:

$$\frac{dz}{dy} = 0 \quad \frac{dz}{dx} = 0 \quad ،$$

2- الشرط الكافي: أن تكون قيم المشتقات الجزئية الثانية للدالة عند القيم الحرجة كما يلي:

- أن تكون موجبة في حالة النهايات الصغرى أي أن:

$$\frac{d^2z}{dx^2} \quad , \quad \frac{d^2z}{dy^2} > 0$$

-أن تكون سالبة في حالة النهايات العظمى أي أن:

$$\frac{d^2z}{dx^2} \quad , \quad \frac{d^2z}{dy^2} < 0$$

3- أما لمعرفة كون الدالة في حالتها المثلى عند النظر إليها من جميع الاتجاهات فيجب أن تكون قيمة حاصل ضرب المشتقات الجزئية الثانية ببعضها عند القيم الحرجة أكبر من قيمة مربع المشتقة الجزئية المتقاطعة أي أن:

$$\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right) > \left(\frac{d^2z}{dy^2}\right)^2$$

ويمكن تلخيص شروط النهايات العظمى والصغرى للدوال ذات متغيرين Z= f (x ,y)

الشروط	النهايات العظمى	النهايات الصغرى
الشرط الأول	$\frac{dz}{dx} , \frac{dz}{dy} = 0$	$\frac{dz}{dx} , \frac{dz}{dy} = 0$
الشرط الثاني	$\frac{d^2z}{dx^2} , \frac{d^2z}{dy^2} < 0$	$\frac{d^2z}{dx^2} , \frac{d^2z}{dy^2} > 0$
الشرط الثالث	$\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right) > \left(\frac{d^2z}{dxdy}\right)^2$	$\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right) > \left(\frac{d^2z}{dxdy}\right)^2$

خطوات الحل:

إذا كان لدينا الدالة على الصورة Z= f (x ,y) فإنه يلزم لإيجاد النهايات العظمى والصغرى اتباع الخطوات التالية:

1- إيجاد المشتقات الجزئية الأولى.

$$\frac{dz}{dx}=0 \quad , \quad \frac{dz}{dy}=0$$

2- مساواة المشتقات الجزئية الأولى بالصفر لإيجاد قيم المتغيرات.

$$\frac{dz}{dx}=0 \qquad \frac{dz}{dy}=0$$

3- إيجاد المشتقات الجزئية الثانية.

4- اختيار إشارة المشتقات الجزئية الثانية الرئيسية (المشتقات الجزئية الثانية لكل متغير بالنسبة لنفس المتغير)

- فإذا كانت المشتقات الجزئية الثانية الرئيسية

$$\frac{d^2z}{dx^2}<0 \qquad \frac{d^2z}{dy^2}<0$$

تكون النقطة تمثل نهاية عظمى

- إذا كانت المشتقات الجزئية الثانية الرئيسية.

$$\frac{d^2z}{dy^2}>0 \qquad \frac{d^2z}{dx^2}>0$$

تكون النقطة تمثل نهاية صغرى.

- أن يكون حاصل ضرب المشتقات الجزئية الرئيسية أكبر من مربع المشتقة المتقاطعة.

$$\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right)>\left(\frac{d^2z}{dxdy}\right)^2$$

5- تطبيقات اقتصادية على الأمثلية للدوال الاقتصادية متعددة المتغيرات:

مثال(1):

إذا كانت التكاليف الكلية لأحد المصانع الذي ينتج نوعين من السلع على الصورة التالية:

$$TC = 2Q_1^2 + Q_2^2 - 60Q_1 - 50Q_2 + 800$$

المطلوب: أوجد حجم الإنتاج من السلعتين الذي يحقق أقل تكلفة ممكنة:

خطوات الحل:

1-إيجاد المشتقات الجزئية الأولى:

$$\frac{dTC}{dQ_1} = 4Q_1 - 60$$

$$\frac{dTC}{dQ_2} = 2Q_2 - 50$$

2- مساواتها بالصفر:

$$4Q_1 - 60 \quad = 0$$

$$2Q_2 - 50 \quad = 0$$

وبحل المعادلتين نجد أن:

$$4Q_1 = 60 \qquad Q_1 = \frac{60}{4} = 15$$

$$2Q_2 = 50 \qquad Q_2 = \frac{50}{2} = 25$$

3- إيجاد المشتقات الجزئية الثانية:

$\frac{dTC}{dQ_1} = 4Q_1 - 60$	$\frac{dTC}{dQ_2} = 2Q_2 - 50$
$\frac{d^2}{dQ_1^2} = 4$	$\frac{d^2}{dQ_2Q_1} = 0$
$\frac{d^2}{dQ_1Q_2} = 0$	$\frac{d^2}{dQ_2^2} = 2$

4- نجد أن المشتقات الجزئية الثانية الرئيسية وهي:

$\frac{d^2TC}{dQ_1^2} \frac{d^2TC}{dQ_2^2}$, موجبة أي أن:

$$\frac{d^2TC}{dQ_2^2} , \frac{d^2TC}{dQ_1^2} > 0$$

وكذلك نجد أن حاصل ضرب المشتقات الجزئية الرئيسية أكبر حاصل ضرب المشتقات الجزئية الفرعية:

$$\left[\frac{d^2TC}{dQ_1^{\ 2}} \times \frac{d^2TC}{dQ_2^{\ 2}}\right] > \left[\frac{d^2TC}{dQ_1Q_2} \times \frac{d^2TC}{dQ_2Q_1}\right]$$

وبذلك تتحقق أقل تكلفة ممكنة عند إنتاج 15 وحدة من النوع الأول، 25 وحدة من النوع الثاني أي أن: $Q_1 = 15$, $Q_2 = 25$

مثال(2): مصنع ينتج نوعين من الأجهزة الكهربائية (1، 2)، فإذا كانت دوال الطلب على الجهازين كما يلي:

$$p_1 = 262 - 4Q_1$$
$$P_2 = 222 - 2Q_2$$

وكانت دالة التكلفة الكلية TC للمصنع كما يلي:

$$TC = Q_1^2 + Q_2^2 + 2Q_1\ Q_2 + 2\,Q_1 + 2Q_2 + 300$$

حيث أن: P_1 , P_2 تمثل أسعار السلعتين

Q_1 , Q_2 تمثل كميات السلعتين

المطلوب: أوجد كل من دالة الإيراد الكلي ودالة الربح بالنسبة لحجم الإنتاج.

1-أوجد حجم الإنتاج الواجب إنتاجها من كلا الجهازين الذين يحققان أكبر ربح ممكن.

2- أوجد قيمة كل من TR, , TC , π.

3- أوجد قيمة كل من MC , MR لكل نوع على حدة.

خطوات الحل:

1- إيجاد دالة الإيراد الكلي:

$$TR = TR_1 + TR_2$$
$$= P_1\,Q_1 + P_2\,Q_2$$
$$= (262 - 4Q_1)\ Q_1 + (222 - 2Q_2)\ Q_2$$
$$TR = 262\,Q_1 - 4Q_1^{\ 2} + 222\,Q_2 - 2Q_2^{\ 2}$$

-إيجاد دالة الربح π.

$$\pi = TR - TC$$
$$= 262Q_1 - 4Q_1^2 + 222Q_2 - 2Q_2^2$$
$$- Q_1^2 - Q_2^2 - 2Q_1Q_2 - 2Q_1 - 2Q_2 - 300$$
$$= 260Q_1 + 220Q_2 - 2Q_1Q_2 - 5Q_1^2 - 3Q_2^2 - 300$$

2- لإيجاد حجم الإنتاج من كلا الجهازين لتحقيق أقصى ربح ممكن نتبع الخطوات التالية:

- المشتقات الجزئية الأولى:

$$\frac{d\pi}{dQ_1} = 260 - 2Q_2 - 10Q_1$$
$$\frac{d\pi}{dQ_2} = 220 - 2Q_1 - 6Q_2$$

- مساواة المشتقات الجزئية الأولى بالصفر.

$$260 - 2Q_2 - 10Q_1 = 0$$
$$220 - 2Q_1 - 6Q_2 = 0$$

بعد إعادة ترتيبهم:

$$-10Q_1 - 2Q_2 = -260 \text{............ (1)}$$
$$-2Q_1 - 6Q_2 = -220 \text{............(2)}$$

بحل المعادلتين معاً بطريقة الحذف نجد أن:

$Q_1 = 20$, $Q_2 = 30$

- إيجاد المشتقات الجزئية الثانية:

$\frac{d\pi}{dQ_1} = 260 - 2Q_2 - 10Q_1$	$\frac{d\pi}{dQ_2} = 220 - 2Q_1 - 6Q_2$
$\frac{d^2\pi}{dQ_1^2} = -10$	$\frac{d^2\pi}{dQ_2Q_1} = -2$
$\frac{d^2\pi}{dQ_1Q_2} = -2$	$\frac{d^2\pi}{dQ_2^2} = -6$

-نلاحظ أن المشتقات الجزئية الثانية الرئيسية أقل من الصفر وهي:

سالبة $\frac{d^2\pi}{dQ_1^2} < 0$ $\frac{d^2\pi}{dQ_2^2} < 0$

وكذلك: $\left(\frac{d^2\pi}{dQ_1^2}\right)\left(\frac{d^2\pi}{dQ_2^2}\right) > \left(\frac{d^2\pi}{dQ_1Q_2}\right)^2$

وبذلك فإن حجم الإنتاج الذي يحقق أقصى ربح هو:

$$Q_2 = 30 \quad , \quad Q_1 = 20$$

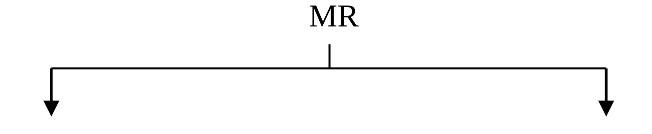
-قيمة كل من TR , TC , π

$$TR = 262Q_1 - 4Q_1^2 + 222Q_2 - 2Q_2^2$$
$$= 262(20) - 4(20)^2 + 222(30) - 2(30)^2$$
$$= 5240 - 1600 + 6660 - 1800$$
$$TR = 8500$$
$$TC = Q_1^2 + Q_2^2 - 2Q_1Q_2 + 2Q_1 + 2Q_2 + 300$$
$$= (20)^2 + (30)^2 + 2(20)(30)\ 2(20) + 2(30) + 300$$
$$= 400 + 900 + 1200 + 40 + 60 + 300$$
$$TC = 2900$$
$$\pi = TR - TC$$
$$\therefore \pi = 8500 - 2900 = 5600$$

أو يمكن التعويض في دالة الربح كما يلي:

$$\pi = 260Q_1 + 220Q_2 - 2Q_1Q_2 - 5Q_1^2 - 3Q_2^2 + 300$$
$$= 260(20) + 220(30) - 2(20)(30) - 5(20)^2 - 3(30)^2 - 300$$
$$= 5200 + 6600 - 1200 - 2000 - 2700 - 300$$
$$\pi = 5600$$

4- أي الإيراد الحدي MR والتكاليف الحدية MC لكل نوع على حدة:



$$MR_2 = \frac{dTR}{dQ_2}$$

$$MR_2 = 202 - 4Q_2$$

$$= 222 - 4(30)$$

$$= \quad 102$$

$$MR_1 = \frac{dTR}{dQ_1}$$

$$MR_1 = 262 - 8Q_1$$

$$= 262 - 8(20)$$

$$= \quad 102$$

MC

$$MC_1 = \frac{dTc}{dQ_1}$$

$$= 2Q_1 + 2Q_2 + 2$$

$$= 2(20) + 2(30) + 2$$

$$= \quad 102$$

$$MC_2 = \frac{dTc}{dQ_2}$$

$$= 2Q_2 + 2Q_1 + 2$$

$$= 2(30) + 2(20) + 2$$

$$= \quad 102$$

ومما سبق يتضح أنه عند حجم الإنتاج الأمثل الذي يحقق أقصى ربح ممكن فإن:

$MC_1 \quad = \quad MR_1$

$MC_2 \quad = \quad MR_2$

6- الأمثلية للدوال الاقتصادية متعددة المتغيرات المقيدة:

عادة ما ترغب أي منشأة في تعظيم أرباحها وكذلك تخفيض تكلفتها ومن ثم أيضاً تعظيم إنتاجها إلا أن هناك بعض القيود التي تحول دون تحقيق هذه الأهداف مثل الإمكانيات المادية، الموارد البشرية، المواد الخام المتاحة، ... الخ. وبالنسبة لمستهلك ما يرغب في تعظيم منفعته من خلال استغلال بعض السلع والخدمات ويواجه أيضاً بعض القيود مثل أسعار هذه

السلع والخدمات أو دخله المتاح، ولإيجاد الحل الأمثل في مثل هذه الحالات نستخدم دالة لاجرانج. وتعتمد دالة لاجرانج على الخطوات التالية:

- تحديد دالة الهدف والتي تأخذ الصورة التالية:

$F(X_1 \ , \ X_2 \ , \ X_3 \ , \ ..... X_n)$

- تحديد دالة القيد والتي تأخذ الصورة التالية:

$G(X_1, X_2, X_3,.., X_n) = C$

حيث تشير G إلى رمز الدالة وإن (C) تشير إلى القيمة الثابتة:

تم تحويل دالة القيد إلى دالة صفرية .

$G(X_1, X_2, X_3, .., X_n) - C = 0$

- تحديد دالة لاجرانج وتأخذ الصورة التالية:

L = [دالة الهدف] - λ [دالة القيد]

حيث λ (لامدا) تمثل مضاعف لاجرانج.

$$\therefore L = F(X_1, X_2, X_3, ...X_n) - \lambda \left[G(X_1, X_1, ...X_n) - C\right]$$

-إيجاد المشتقات الجزئية الأولى لدالة لاجرانج:

$$\frac{dL}{dX_1} \ , \ \frac{dL}{dX_2} \ , ... , \ \frac{dL}{dX_n} \ , \ \frac{dL}{d\lambda}$$

- مساواة المشتقات الجزئية الأولى بالصفر لإيجاد قيم المتغيرات أي:

$$\frac{dL}{dX_1} \quad , \quad \frac{dL}{dX_2}, \quad , \frac{dL}{d\lambda} = 0$$

- إيجاد المشتقات الجزئية الثانية فإذا كان:

$$\frac{d^2L}{dX_1^{\ 2}} \quad , \quad \frac{d^2L}{dX_2^{\ 2}} \quad > \ 0$$

تكون النقطة نهاية صغرى.

أما إذا كان:

$$\frac{d^2L}{dX_1^2} \quad , \quad \frac{d^2L}{dX_2^2} \quad < \quad 0$$

تكون النقطة نهاية عظمى.

ماذا يقصد بمعامل لاجرانج (λ):

يشير (λ) معامل لاجرانج إلى درجة حساسية دالة الهدف للتغير الذي يحدث في قيمة ثابت القيد، أو هو مقياس لتلك الحساسية، حيث يمثل مقدار التغير في دالة الهدف نتيجة تغير ثابت قيمة دالة القيد بمقدار وحدة واحدة، وبذلك فإن معامل لاجرانج يكتسب الصفة الحدية بما يمثله من مقادير اقتصادية، وهو بذلك يلعب دوراً هاماً في تغير سلوك العديد من الدوال الاقتصادية.

7- تطبيقات اقتصادية على الأمثلية للدوال الاقتصادية متعددة المتغيرات المقيدة:

مثال(1): ينتج مصنع المنال للأجهزة الكهربائية نوعين من الأجهزة هما (1، 2) وكانت دوال الطلب على الجهازين على الصورة التالية:

$$P_1 = 30 - 3Q_1 + 2Q_2$$
$$P_2 = 10 + 5Q_1 - 2Q_2$$

وكانت دالة التكلفة الكلية على الصورة:

$$TC = 4000 - 15Q_1 + Q_1^2 - 175Q_2 + Q_2^2 + 4Q_1 Q_2$$

المطلوب:

1- استنتج كل من دالتى الإيراد الكلي (TR) والربح (π) بالنسبة لحجم الإنتاج Q_2 , Q_1.

2- باستخدام دالة لاجرانج أوجد قيمة (Q_1 , Q_2). الذين يحققان أقصى ربح ممكن للمصنع، علماً بأن المصنع يمكنه إنتاج 60 وحدة فقط من كلا الجهازين.

خطوات الحل:

-دالة الإيراد الكلي (TR) هي:

$$\therefore TR = TR_1 + TR_2$$
$$= P_1Q_1 + P_2Q_2$$
$$= (30 - 3Q_1 + 2Q_2)\,Q_1 + (10 + 5Q_1 - 2Q_2)\,Q_2$$
$$= 30Q_1 - 3Q_1^2 + 2Q_1Q_2 + 10Q_2 + 5Q_1Q_2 - 2Q_2^2$$
$$\therefore TR = 30Q_1 - 3Q_1^2 + 7Q_1Q_2 + 10Q_2 - 2Q_2^2$$

-دالة الربح π هي:

$$\therefore \pi = TR - TC$$
$$\pi = 30Q_1 - 3Q_1^2 + 7Q_1Q_2 + 10Q_2 - 2Q_2^2$$
$$- 4000 + 15Q_1 - Q_1^2 + 175Q_2 - Q_2^2 + 4Q_1Q_2$$
$$\therefore \pi = 45Q_1 - 4Q_1^2 + 185Q_2 - 3Q_2^2 + 3Q_1Q_2 - 4000$$

وبذلك فإنه لاستخدام دالة لاجرانج نتبع الخطوات التالية:

- صياغة دالة الهدف ← تعظيم الربح.

$$\therefore \pi = 45Q_1 - 4Q_1^2 + 185Q_2 - 3Q_2^2 + 3Q_1Q_2 - 4000$$

- صياغة دالة القيد:

$$\therefore Q_1 + Q_2 = 60$$

ثم تحويل دالة القيد إلى دالة صفرية:

$$Q_1 + Q_2 - 60 = 0$$

-صياغة دالة لاجرانج

L = [دالة الهدف] - λ [دالة القيد]

وبالتعويض:

$$= 45Q_1 - 4Q_1^2 + 185Q_2 - 3Q_2^2 + 3Q_1Q_2 - 4000$$
$$-\lambda\,(Q_1 + Q_2 - 60)$$
$$= 45Q_1 - 4Q_1^2 + 185Q_2 - 3Q_2^2 + 3Q_1Q_2 - 4000$$
$$-\lambda Q_1 - \lambda Q_2 + 60\lambda$$

-إيجاد المشتقات الجزئية الأولى لدالة لاجرانج:

$$\frac{dL}{dQ_1} = 45 - 8Q_1 + 3Q_2 - \lambda$$

$$\frac{dL}{dQ_2} = 185 - 6Q_2 + 3Q_1 - \lambda$$

$$\frac{dL}{dQ} = -Q_1 - Q_2 + 60$$

- مساواة المشتقات الجزئية الأولى بالصفر:

$$45 - 8Q_1 + 3Q_2 - \lambda = 0$$
$$185 - 6Q_2 + 3Q_1 - \lambda = 0$$
$$-Q_1 - Q_2 + 60 = 0$$

إعادة ترتيب المعادلات السابقة:

$$-8Q_1 + 3Q_2 - \lambda = -45 \ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$
$$3Q_1 - 6Q_2 - \lambda = -185 \ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$
$$-Q_1 - Q_2 = -60 \ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$

بحل هذه المعادلات معاً وذلك كما يلي:

بحل المعادلتين (1، 2).

$$-8Q_1 + 3Q_2 - \lambda = -45$$
$$3Q_1 - 6Q_2 - \lambda = -185$$

بالطرح

$$-11Q_1 + 9Q_2 = 140 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

ثم بحل المعادلة رقم (3) والمعادلة رقم (4) معاً

$$-Q_1 - Q_2 = -60 \ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$
$$-11Q_1 + 9Q_2 = -140 \ldots\ldots\ldots\ldots(4)$$

بضرب المعادلة رقم (3) × 9 نحصل على:

$$\begin{array}{rl} -9Q_1 - 9Q_2 &= -540 \\ -11Q_1 + 9Q_2 &= 140 \\ \hline -20Q_1 &= -400 \end{array}$$

$$\therefore \quad Q_1 = \frac{-400}{-20} = 20$$

بالجمع

بالتعويض في إحدى المعادلتين (3) أو (4) نحصل على قيمة Q_2.

$$-20 - Q_2 = -60$$

$$\therefore \quad Q_2 = 40$$

ثم بالتعويض في إحدى المعادلتين (1)، (2) نحصل على قيمة λ:

$$-8(20) + 3(40) - \lambda = -45$$

$$-160 + 120 - \lambda = -45$$

$$-40 - \lambda = -45$$

$$-\lambda = -5$$

$$\lambda = 5$$

وبذلك نجد أن: $\lambda = 5 \;,\; Q2 = 4_0 \;,\; Q_1 = 20$

-إيجاد المشتقات الجزئية الثانية وكما يلي:

$$\boxed{\frac{dL}{dQ_1} = 45 - 8Q_1 + 3Q_2 - \lambda}$$

$$\frac{d^2L}{dQ_1^{\,2}} = -8$$

$$\frac{d^2L}{dQ_1Q_2} = 3$$

$$\frac{d^2L}{dQ_1\lambda} = -1$$

$$\boxed{\frac{dL}{dQ_2} = 185 - 6Q_2 + 3Q_1 - \lambda}$$

$$\frac{dL}{dQ_2Q_1} = 3$$

$$\frac{dL}{dQ_2^{\,2}} = -6$$

$$\frac{dL}{dQ_2\lambda} = -1$$

$$\boxed{\frac{dL}{d\lambda} = -Q_1 - Q_2 + 60}$$

$$\frac{dL}{d\lambda Q_1} = -1$$

$$\frac{dL}{d\lambda Q_2} = -1$$

$$\frac{dL}{d\lambda^2} = 0$$

وحيث أن المشتقات الجزئية الثانية الرئيسية وهي:

$$\frac{d^2L}{dQ_1^{\,2}} \; , \; \frac{d^2L}{dQ_2^{\,2}}$$

سالبة وبذلك يكون هناك نهاية عظمى عندما:

$$= 5 \; , \quad Q_2 = 40 \quad , \quad Q_1 = 20 \quad \lambda$$

وكذلك فإن:

$$\left(\frac{d^2L}{dQ_1^{\,2}}\right) \left(\frac{d^2L}{dQ_2^{\,2}}\right) > \left(\frac{d^2L}{dQ_1Q_2}\right)^2$$

$$(-8)\ (-6) \ > (3)^2$$

مثال (2): مصنع منة الله لإنتاج السجاد ينتج نوعين من السجاد هي (1، 2) فإذا كانت دوال الطلب على النوعين على الصورة التالية:

$$P_1 = 45 - 2Q_1 + Q_2$$

$$P_2 = 35 + 3Q_1 - 2Q_2$$

وكانت دالة التكلفة الكلية على الصورة:

$$TC = 500 - 25Q_1 + 5Q_2 - Q_2^{\,2} + 2Q_1 Q_2$$

المطلوب:

1- استنتج كل من دالتى الإيراد الكلي (TR) والربح (π) بالنسبة لحجم الإنتاج Q_1 , Q_2.

2- باستخدام دالة لاجرانج أوجد قيمة (Q_1 , Q_2). الذين يحققان أقصى ربح ممكن للمصنع، علماً بأن المصنع يمكنه إنتاج 40 وحدة فقط من كلا الجهازين.

خطوات الحل:

- دالة الإيراد الكلي (TR) هي:

$$\therefore TR = TR_1 + TR_2$$
$$= (45 - 2Q_1 + Q_2)\,Q_1 + (35 + 3Q_1 - 2Q_2)\,Q_2$$
$$= 45Q_1 - 2Q_1^{\,2} + Q_1 Q_2 + 35Q_2 + 30Q_1 Q_2 - 2Q_2^{\,2}$$
$$\therefore TR = 45Q_1 - 2Q_1^{\,2} + 4Q_1 Q_2 + 35Q_2 - 2Q_2^{\,2}$$

- دالة الربح π هي:

$$\therefore \pi = TR - TC$$

$$\pi = 45Q_1 - 2Q_1^2 + 4Q_1Q_2 + 35Q_2 - 2Q_2^2$$

$$= -500 + 25Q_1 - 5Q_2 + Q_2^2 - 2Q_1Q_2$$

$$\therefore \pi = 70Q_1 - 2Q_1^2 + 30Q_2 - Q_2^2 + 2Q_1Q_2 - 500$$

باستخدام دالة لاجرانج تحديد حجم الإنتاج من كلا النوعين لتحقيق أقصى ربح ممكن نتبع الخطوات التالية:

- صياغة دالة الهدف:

$$\pi = 70Q_1 - 2Q_1^2 + 30Q_2 - Q_2^2 + 2Q_1Q_2 - 500$$

- صياغة دالة القيد:

$$Q_1 + Q_2 = 40$$

ثم تحويل دالة القيد إلى دالة صفرية:

$$Q_1 + Q_2 - 40 = 0$$

-صياغة دالة لاجرانج كما يلي:

دالة L لاجرانج = [دالة الهدف] - λ [دالة القيد]

$$\therefore L = 70Q_1 - 2Q_1^2 + 30Q_2 - Q_2^2 + 2Q_1Q_2 - 500 - \lambda(Q_1 + Q_2 - 40)$$

$$L = 70Q_1 - 2Q_1^2 + 30Q_2 - Q_2^2 + 2Q_1Q_2 - 500 - \lambda Q_1 - \lambda Q_2 + 40\lambda$$

-إيجاد المشتقات الجزئية الأولى لدالة لاجرانج:

$$\frac{dL}{dQ_1} = 70 - 4Q_1 + 2Q_2 - \lambda$$

$$\frac{dL}{dQ_2} = 70 - 4Q_2 + 2Q_1 - \lambda$$

$$\frac{dL}{dQ} = -Q_1 - Q_2 + 40$$

- مساواة المشتقات الجزئية الأولى بالصفر:

$$70 - 4Q_1 + 2Q_2 - \lambda = 0$$
$$30 - 2Q_2 + 2Q_1 - \lambda = 0$$
$$-Q_1 - Q_2 + 40 = 0$$

إعادة ترتيب المعادلات السابقة:

$$-4Q + 2Q_2 - \lambda = -70$$
$$2Q_1 - 20Q_2 - \lambda = -30$$
$$-Q_1 - Q_2 = -40$$

ثم حل المعادلات معاً بطريقة الحذف أو بطريقة المحددات أو بطريقة المصفوفات، نحصل على قيم Q_1 , Q_2 , λ كما يلي:

$$\lambda = 30 \quad , Q_2 = 20 \quad , \quad Q_1 = 20$$

- إيجاد المشتقات الجزئية الثانية كما يلي:

$$\frac{dL}{dQ_1} = 70 - 4Q_1 + 2Q_2 - \lambda$$

$$\frac{d^2L}{dQ_1^2} = -4$$

$$\frac{dL}{dQ_1Q_2} = 2$$

$$\frac{d^2L}{dQ\lambda} = -1$$

$$\frac{dL}{dQ_2} = 30 - 2Q_2 + 2Q_1 - \lambda$$

$$\frac{d^2L}{dQ_2Q_1} = 2$$

$$\frac{d^2L}{dQ_2{}^2} = -2$$

$$\frac{d^2L}{dQ_2\lambda} = -1$$

$$\frac{dL}{d\lambda} = -Q_1 - Q_2 + 40$$

$$\frac{d^2L}{d\lambda Q_1} = -1$$

$$\frac{d^2L}{d\lambda Q_2} = -1$$

$$\frac{d^2L}{d\lambda^2} = 0$$

وحيث أن المشتقات الثانية الرئيسية:

سالبة: $\frac{d^2L}{dQ_1^2} \quad , \quad \frac{d^2L}{dQ_2^2} \quad < \quad 0$

وبذلك يكون هناك نهاية عظمى عندما $Q_1 = 20$, $Q_2 = 20$.

كذلك فإن: $\left(\frac{d^2L}{dQ_1^2}\right)\left(\frac{d^2L}{dQ_2^2}\right) > \left(\frac{d^2L}{dQ_1Q_2}\right)^2$

$$(-4)\ (-2) \quad > (2)^2$$

الباب الثاني

2

المحددات
Determinants

- **الفصل الأول: طبيعة واستخدامات وخصائص المحددات**
- **الفصل الثاني: استخدام المحددات في حل المشاكل الاقتصادية والإدارية والمالية**

الفصل الأول

1

طبيعة واستخدامات وخصائص المحددات

Determinants Uses And Their Properties

الفصل الأول
طبيعة واستخدامات وخصائص المحددات
Determinants Uses And Their Properties

1- مفهوم المحددات (Concept of Determinants)

المحدد هو عبارة عن شكل أو منظومة رياضية تشمل مجموعة من العناصر (الأرقام أو الرموز) مرتبة في شكل صفوف وأعمدة، ويكون دائماً عدد الصفوف يساوي عدد الأعمدة -بمعنى أن المحدد يأخذ شكل مصفوفة مربعة دائماً، ويستخدم في حل بعض المشاكل الرياضية التي يمكن صياغتها في صورة معادلات خطية مثل إدارة الإنتاج، توازن السوق، توازن الدخل القومي، اختيار بدائل الاستثمار وغيرهما.

محدد من الدرجة الثانية كما يلي:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

وتعرف الكميات a_{ij} بعناصر المحدد، حيث يشير الرمز (i) إلى الصف الذي يقع فيه العنصر، بينما يشير الرمز (j) إلى العمود الذي يقع فيه العنصر.

محدد من الدرجة الثالثة كما يلي:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

محدد من الدرجة الرابعة كما يلي:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

ويكون المحدد من الدرجة (n) كما يلي:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

2- إيجاد قيمة المحدد:

2-1- إيجاد قيمة المحدد من الدرجة الثانية:

إذا كان لدينا المحدد من الدرجة الثانية على الصورة.

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

فإن قيمة المحدد $|\Delta|$ هي:

$$|\Delta| = (a_{11} \times a_{22}) - (a_{12} \times a_{21})$$

أي أن:

قيمة المحدد من الدرجة الثانية تساوي الفرق بين حاصل ضرب عناصر القطر الرئيسي وحاصل ضرب عناصر القطر الثانوي (أو الفرعي).

مثال(1): أوجد قيمة المحدد.

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}$$

الحل:

قيمة المحدد = حاصل ضرب عناصر القطر الرئيسي – حاصل ضرب عناصر القطر الفرعي

$$|\Delta| = (2 \times 4) - (1 \times 3)$$
$$= 8 - 3 = 5$$

مثال(2): أوجد قيمة المحدد:

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}$$

الحل: قيمة المحدد $|\Delta|$

$$|\Delta| = (2\times 4) - (1\times -3)$$
$$= 8 - (-3) = 8+3 = 11$$

مثال(3): أوجد قيمة المحدد:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -4 \end{vmatrix}$$

الحل: قيمة المحدد $|\Delta|$

$$|\Delta| = (2\times -4) - (3\times 1)$$
$$= -8 - 3 = -11$$

2-2- قيمة المحدد من الدرجة الثالثة:

إذا كان لدينا المحدد من الدرجة الثالثة على الصورة:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

فإنه يتم إيجاد قيمة المحدد من الدرجة الثالثة بإحدى الطريقتين.

أ- طريقة الضرب القطري:

حيث يمكن إيجاد قيمة المحدد من الدرجة الثالثة باستخدام طريقة الضرب القطري والتي تتلخص هذه الطريقة في إعادة كتابة العمودين الأول والثاني على يمين المحدد الأصلي ثم ضرب الأقطار الرئيسية وجمع حاصل الضرب جبرياً ثم ضرب الأقطار الفرعية أو الثانوية وجمع حاصل الضرب جبرياً ويقصد بالقطر الرئيسي هو القطر الذي ينحدر من اليسار إلى اليمين بينما القطر الفرعي هو القطر الذي ينحدر من اليمين إلى اليسار ولذا فإن قيمة المحدد هي:

قيمة المحدد $|\Delta|$ = جمع حاصل ضرب الأقطار الرئيسية – جمع حاصل ضرب الأقطار الفرعية أو الثانوية

فمثلاً إذا كان لدينا المحدد:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

باستخدام طريقة الضرب القطري يتم إيجاد قيمة المحدد كما يلي:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$|\Delta| = (a_{11} \times a_{22} \times a_{33}) + (a_{12} \times a_{23} \times a_{33}) + (a_{13} \times a_{21} \times a_{32})$$
$$-\left[(a_{13} \times a_{22} \times a_{31}) + (a_{11} \times a_{23} \times a_{32}) + (a_{12} \times a_{21} \times a_{33})\right]$$

مثال: أوجد قيمة المحدد:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

الحل:

باستخدام طريقة الضرب القطري يمكن إيجاد قيمة المحدد:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 4 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

$$|\Delta| = (2 \times 1 \times 0) + (3 \times 4 \times 0) + (1 \times -1 \times 2)$$
$$-\left[(1 \times 1 \times 0) + (2 \times 4 \times 2) + (3 \times -1 \times 0)\right]$$
$$= (0 + 0 - 2) - (0 + 16 + 0)$$
$$= -2 - 16 = -18$$

ب- طريقة المحددات الصغرى (المحيددات)

حيث يكون لكل عنصر من عناصر المحدد، محدد أصغر يتكون من المحدد الأصلي بعد حذف الصف والعمود الذي يقع فيه هذا العنصر.

فمثلاً إذا كان لدينا المحدد:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

يتم إيجاد قيمة المحدد باستخدام المحددات الصغرى مع ملاحظة قاعدة الإشارات لكل عنصر.

$$\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}$$

ويتم استخدام صف أو عمود (أي صف أو أي عمود) لإيجاد قيمة المحدد مع ملاحظة قاعدة إشارات كل عنصر.

فمثلاً قيمة المحدد باستخدام الصف الأول.

$$|A| = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{23} \end{vmatrix}$$

ثم بعد ذلك إيجاد قيمة المحددات من الدرجة الثانية كما يلي:

$$\begin{aligned} |A| = a_{11}&\left[(a_{22} \times a_{33}) - (a_{23} \times a_{32})\right] \\ -a_{12}&\left[(a_{21} \times a_{33}) - (a_{31} \times a_{23})\right] \\ +a_{13}&\left[(a_{21} \times a_{23}) - (a_{31} \times a_{22})\right] \end{aligned}$$

كذلك يمكن إيجاد قيمة المحدد باستخدام العمود الأول كما يلي:

$$|A| = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$$

ثم بعد ذلك إيجاد قيمة المحددات من الدرجة الثانية كما سبق:

مثال: أوجد قيمة المحدد:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

الحل: قيمة المحدد باستخدام المحددات الصغرى

I- باستخدام عناصر الصف الأول:

$$|A| = 2\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}$$

$$|A| = 2\ [(1\times 0)-(2\times 4)] - 3\ [(1\times 0)-(4\times 0)] + 1\ [(-1\times 2)-(1\times 0)]$$

$$|A| = 2\ [(0-8)]\ -3\ [(0-0)]\ +1\ [(-2-0)]$$
$$=(2\times -8) - (3\times 0) + (1\times -2)$$
$$=-16-0-2=-18$$

II- يمكن إيجاد قيمة المحدد باستخدام عناصر العمود الأول:

$$|A| = 2\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} - (-1)\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}$$

$$=2\ [(1\times 0)-(2\times 4)] + 1\ [(3\times 0)-(2\times 1)] + 0\ [(3\times 4)-(1\times 1)]$$

$$=2\ [(0-8)]\ +1\ [(0-2)]\ +0\ [(12-1)]$$
$$=(2\times -8) + (1\times -2) + (0\times 11)$$
$$=-16-2+0=-18$$

3- خصائص المحددات Properties of determinants

للمحددات عدد من الخصائص التي يساعد فهمها في تسهيل حل المحددات. وفيما يلي أهم هذه الخصائص:

1- لا تتغير قيمة المحدد إذا حولت عناصر صفوفه إلى أعمدة أو حولت عناصر أعمدته إلى صفوف طبقاً للترتيب نفسه. حيث أنه يمكن إيجاد قيمة المحدد باستخدام أي صف أو أي عمود.

مثال(1): أوجد قيمة المحدد من المصفوفة التالية:

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 7 & -1 \end{vmatrix}$$

الحل: فإن قيمة المحدد هي:

$$|\Delta| = 2\ (-1) - 7(5)$$
$$= -2 - 35 = -37$$

فإذا قمنا بتبديل الصف أعمدة والأعمدة صفوف كما يلي:

$$\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 5 & -1 \end{vmatrix}$$

فإن قيمة المحدد هي:

$$|\Delta| = 2\ (-1) - 5(7)$$
$$= -2 - 35 = -37$$

مثال(2):

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

الحل: قيمة المحدد هي:

$$|\Delta| = 1\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}$$
$$= 1\ [(2-6) - 3(3-12) + 4\ (6-8)]$$
$$= (1\times -4) - (3 \times -9) + (4 \times -2)$$
$$= -4 + 27 - 8 = 15$$

بتبديل الصفوف أعمدة والأعمدة صفوف.

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 2 \\ 4 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

فإن قيمة المحدد هي:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 2 \\ 4 & 3 & 1 \end{vmatrix}\begin{matrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{matrix}\Bigg|$$

$$|\Delta| = (1\times 2\times 1) + (3\times 2\times 4) + (4\times 3\times 3) - \left[(4\times 2\times 4) + (1\times 2\times 3) + (3\times 3\times 1)\right]$$

$$|\Delta| = 2 + 24 + 36 - \left[(32 + 6 + 9)\right]$$

$$= 62 - 47 = 15$$

2- تكون قيمة المحدد تساور صفراً إذا كان عناصر أي صف أو أي عمود تساوي صفراً.

فمثلاً قيمة المحدد للمثال أدناه تساوي صفراً، أي:

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \end{vmatrix} = 0$$

أو قيمة المحدد = صفر

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 6 \end{vmatrix} = 0$$

3- في حالة ضرب مقدار ثابت في المحدد فإنه يتم ضرب المقدار الثابت في أحد الصفوف أو في أحد الأعمدة كما يلي:

$$5\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 10 & 15 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}$$

$$5\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 10 & 3 \\ 20 & 1 \end{vmatrix}$$

كذلك في حالة أخذ عامل مشترك يتم أخذ العامل المشترك من أحد الصفوف أو من أحد الأعمدة.

4- إذا ضربت جميع عناصر أي صف أو عمود من المحدد في كمية ثابتة، فإن قيمة المحدد تتضاعف بالكمية نفسها.

فمثلاً قيمة المحدد:

$$\begin{vmatrix} 75 & 50 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = (75\times 3) - (50\times 4)$$

$$= 225 - 200 = 25$$

يمكن إيجاد قيمة المحدد عن طريق أخذ عامل مشترك.

$$25\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 25\,[(9-8)]$$

$$= \ 25\times 1 = 25$$

5- إذا تم تبديل أي صفان أو عمودان في المحدد تتغير إشارة المحدد دون أن تتغير قيمته.

فمثلاً حيث قمنا بتبديل الصفين الأول والثاني معاً.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 6 & 7 & 8 \\ 6 & 7 & -8 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 6 & 7 & 8 \\ 1 & 1 & 1 \\ 6 & 7 & -8 \end{vmatrix}$$

فمثلاً إذا قمنا بتبديل العمودين الأول والثاني معاً.

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \end{vmatrix}$$

6- إذا تناسب قيم عناصر أي صفان أو عمودان في المحدد، كانت قيمة المحدد تساوي صفراً.

فمثلاً – الصف الثاني ضعف الصف الأول.

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 6 & 8 \\ 5 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

فمثلاً العمود الثالث ضعف العمود الثاني.

$$\begin{vmatrix} 5 & 2 & 4 \\ -1 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 6 \end{vmatrix} = 0$$

7- إذا كان المحدد يأخذ شكل محدد مثلثية فإن قيمة المحدد المثلثة تساوي حاصل ضرب عناصر قطره الرئيسي.

فإن قيمة المحدد:

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 5 & 6 & 0 \\ -2 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 2 \times 6 \times 3 = 36$$

4- استخدام المحددات في حل المعادلات الخطية (طريقة كريمر):

إذا كان لدينا المعادلات الخطية الآتية، يتم استخدام المحددات في حل المعادلات الخطية كما يلي:

أ) حل معادلتين ذات متغيرين:

$$a_{11}x + a_{12}y = b_1$$

$$a_{21}x + a_{22}y = b_2$$

يتم إتباع الخطوات الآتية:

1- إيجاد قيمة محدد المعاملات $|\Delta|$ كما يلي:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

2- إيجاد قيمة محدد x $|\Delta x|$ كما يلي:

$$\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}$$

3- إيجاد قيمة محدد y $|\Delta y|$ كما يلي:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$$

4- يتم إيجاد قيم المتغيرات كما يلي:

$$x = \frac{|\Delta x|}{|\Delta|}$$

$$y = \frac{|\Delta y|}{|\Delta|}$$

مثال(1): حل المعادلات الآتية باستخدام المحددات (طريقة كرمر):

$$2x + 4y = 20$$
$$5x - 10y = 10$$

خطوات الحل:

1-إيجاد قيمة محدد المعاملات $|\Delta|$ كما يلي:

$$|\Delta| = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 5 & -10 \end{vmatrix}$$
$$= (2 \times -10) - (5 \times 4)$$
$$= -20 - 20 = -40$$

2- إيجاد قيمة محدد x $|\Delta x|$ كما يلي:

$$|\Delta x| = \begin{vmatrix} 20 & 4 \\ 10 & -10 \end{vmatrix}$$
$$= (20 \times -10) - (10 \times 4)$$
$$= -200 - 40 = -240$$

3- إيجاد قيمة محدد y $|\Delta y|$ كما يلي:

$$|\Delta y| = \begin{vmatrix} 2 & 20 \\ 5 & 10 \end{vmatrix}$$
$$= (2 \times 10) - (5 \times 20)$$
$$= -20 - 100 = -80$$

4- يتم إيجاد قيمة x، y كما يلي:

$$x = \frac{|\Delta x|}{|\Delta|} = \frac{240}{-40} = 6$$
$$y = \frac{|\Delta y|}{|\Delta|} = \frac{-80}{-40} = 2$$

ويمكن التحقيق أو التأكيد من خلال التعويض عن قيم x، y في المعادلات نجد أن الطرفين متساويين.

مثال(2): حل المعادلات الآتية باستخدام المحددات.

$$3X + 2Y = 1$$
$$-2X + Y = 2$$

خطوات الحل:

1-إيجاد قيمة محدد المعاملات $|\Delta|$ كما يلي:

$$|\Delta| = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}$$
$$= 3 + 4 = 7$$

2- إيجاد قيمة محدد x $|\Delta x|$ كما يلي:

$$|\Delta x| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$$
$$= 1 - 4 = -3$$

3- إيجاد قيمة محدد y $|\Delta y|$ كما يلي:

$$|\Delta y| = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix}$$
$$= 6 + 2 = 8$$

4- إيجاد قيم x، y كما يلي:

$$x = \frac{|\Delta x|}{|\Delta|} = \frac{-3}{7}$$
$$y = \frac{|\Delta y|}{|\Delta|} = \frac{8}{7}$$

ب- حل ثلاث معادلات ذات ثلاث متغيرات.

$$a_{11} x + a_{12} y + a_{13} z = b_1$$
$$a_{21} x + a_{22} y + a_{23} z = b_2$$
$$a_{31} x + a_{32} y + a_{33} z = b_3$$

يتم الحل كما يلي:

1- إيجاد قيمة محدد المعاملات $|\Delta|$ كما يلي:

$$|\Delta| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

2- إيجاد قيمة محدد x $|\Delta x|$ كما يلي:

$$|\Delta x| = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

3- إيجاد قيمة محدد y $|\Delta y|$ كما يلي:

$$|\Delta y| = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}$$

4- إيجاد قيمة محدد z $|\Delta z|$ كما يلي:

$$|\Delta z| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

5- إيجاد قيم المتغيرات كما يلي:

$$x = \frac{|\Delta x|}{|\Delta|} \qquad y = \frac{|\Delta y|}{|\Delta|} \qquad z = \frac{|\Delta z|}{|\Delta|}$$

مثال (1): حل المعادلات الآتية باستخدام المحددات (طريقة كرمر):

$$\begin{aligned} x + 3y - z &= 4 \\ 2x + y + 2z &= 10 \\ 2x - y + z &= 4 \end{aligned}$$

خطات الحل:

1- إيجاد قيمة محدد المعاملات $|\Delta|$

$$|\Delta| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

يـتم إيجـاد قيمـة المحـدد مـن الدرجـة الثالثـة باسـتخدام طريقـة الضـرب القطري أو طريقة المحددات الصغرى.

$$\Delta = 1\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + (-1)\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= 1\,(1+2) - 3\,(2-6) - 1\,(-2-3)$$
$$= (1\times 3) - (3 \times -4) - (1 \times -5)$$
$$= 3 + 12 + 5 = 20$$

2- قيمة محدد x $|\Delta x|$ كما يلي:

$$|\Delta x| = \begin{vmatrix} 4 & 3 & -1 \\ 10 & 1 & 2 \\ 4 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$|\Delta x| = 4\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 10 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} + (-1)\begin{vmatrix} 10 & 1 \\ 4 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= 4\,(1+2) - 3\,(10-8) - 1\,(-10-4)$$
$$= 12 - 6 + 14 = 20$$

3- إيجاد قيمة محدد y $|\Delta y|$ كما يلي:

$$|\Delta y| = \begin{vmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 2 & 10 & 2 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix}$$

$$|\Delta y| = 1\begin{vmatrix} 10 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + (-1)\begin{vmatrix} 2 & 10 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= 1\,(10-8) - 4\,(2-6) - 1\,(8-30)$$
$$= (1\times 2) - (4\times -4) - (1\times -22)$$
$$= 2 + 16 + 22 = 40$$

4- إيجاد قيمة محدد z $|\Delta z|$ كما يلي:

$$|\Delta z| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 10 \\ 3 & -1 & 4 \end{vmatrix}$$

$$|\Delta z| = 1\begin{vmatrix} 1 & 10 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 2 & 10 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= 1\,(4+10) - 3\,(8-30) + 4\,(-2-3)$$
$$= (1\times 14) - (3\times -22) + (4\times -5)$$
$$= 14 + 66 - 20 = 60$$

5- يتم إيجاد قيمة x، y، z كما يلي:

- قيمة x كما يلي:

$$x = \frac{|\Delta x|}{|\Delta|}$$

$$x = \frac{20}{20} = 1$$

- قيمة y كما يلي:

$$y = \frac{|\Delta y|}{|\Delta|} = \frac{40}{20} = 2$$

- قيمة z كما يلي:

$$z = \frac{|\Delta z|}{|\Delta|} = \frac{60}{20} = 3$$



استخدام المحددات في حل المشاكل الاقتصادية والإدارية والمالية

Use of Determinants in Solving Economics, Managements and Financial Problems

2

الفصل الثاني
استخدام المحددات في حل المشاكل الاقتصادية والإدارية والمالية
Use of Determinants in Solving Economics Managements and Financial Problems

فيما يلي بعض التطبيقات الاقتصادية على المحددات وهي:

- المحددات وإدارة الإنتاج.
- المحددات وتوازن السوق.
- المحددات وبدائل الاستثمار.
- المحددات وتوازن الدخل القومي.

أولاً: المحددات وإدارة الإنتاج:

مثال(1): شركة أحمد لإنتاج الأجهزة الكهربائية تقوم بالتخطيط لإنتاج الغسالات والثلاجات، فإذا كان إنتاج الغسالة الواحدة يحتاج إلى ساعة عمل في قسم التجميع، وثلاث ساعات عمل في قسم التشغيل، وإنتاج الثلاجة الواحدة يحتاج إلى ساعتان عمل في قسم التجميع وساعة عمل في قسم التشغيل، فإذا علمت أن طاقة قسم التجميع 40 ساعة عمل أسبوعياً، وطاقة قسم التشغيل 60 ساعة عمل أسبوعياً، فما هي الكمية الواجب إنتاجها أسبوعياً لاستغلال الطاقة المتاحة للشركة بالكامل.

خطوات الحل:

يمكن وضع المعطيات في الجدول التالي:

الطاقة المتاحة	الثلاجة (y)	الغسالة (x)	المنتجات / الأقسام
40	2	1	قسم التجميع
60	1	3	قسم التشغيل

يتم تكوين المعادلات الخطية لكل قسم كما يلي:

$$x + 2y = 40$$

$$3x + y = 60$$

بحل هذه المعادلات باستخدام المحددات وباتباع الخطوات الآتية.

1- إيجاد محدد المعاملات $|\Delta|$:

$$|\Delta| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$|\Delta| = (1 \times 1) - (2 \times 3) = 1 - 6 = -5$$

2- إيجاد محدد x $|\Delta x|$:

$$|\Delta x| = \begin{vmatrix} 40 & 2 \\ 60 & 1 \end{vmatrix}$$

$$|\Delta x| = (40 \times 1) - (60 \times 2) = 40 - 120 = -80$$

3- محدد y $|\Delta y|$:

$$|\Delta y| = \begin{vmatrix} 1 & 40 \\ 3 & 60 \end{vmatrix}$$

$$|\Delta x| = (1 \times 60) - (3 \times 40) = 60 - 120 = -60$$

4- إيجاد قيم المتغيرات:

$$x = \frac{|\Delta x|}{|\Delta|} = \frac{-80}{-5} = 16$$

$$y = \frac{|\Delta y|}{|\Delta|} = \frac{-60}{-5} = 12$$

أي أنه لاستغلال الطاقة المتاحة أسبوعياً للمصنع فإنه لا بد من إنتاج 16 غسالة، 12 ثلاجة أسبوعياً.

مثال(2): شركة منة الله لإنتاج السيارات تقوم بالتخطيط لإنتاج ثلاثة أنواع من السيارات هي (مرسيدس، BMW، تويوتا) فإذا كان إنتاج السيارة المرسيدس يحتاج إلى ساعة عمل في مركز الإنتاج الأول، و3 ساعات عمل في مركز الإنتاج الثاني، 4 ساعات عمل في مركز الإنتاج الثالث، وإنتاج السيارة BMW يحتاج إلى 3 ساعات عمل في مركز الإنتاج الأول، وساعتان عمل في مركز الإنتاج الثاني، وساعتان عمل في مركز الإنتاج الثالث، وإنتاج السيارة تويوتا يحتاج إلى 4 ساعات عمل في مركز الإنتاج الأول، 3

ساعات عمل في مركز الإنتاج الثاني، وساعة عمل في مركز الإنتاج الثالث. فإذا علمت أن طاقة مركز الإنتاج الأول 21 ساعة عمل أسبوعياً، وطاقة مركز الإنتاج الثاني 24 ساعة عمل أسبوعياً، وطاقة مركز الإنتاج الثالث 24 ساعة عمل أسبوعياً.

المطلوب: حدد الكمية الواجب إنتاجها أسبوعياً من الأنواع الثلاثة بحيث يتم استغلال الطاقة المتاحة بالكامل.

خطوات الحل: يمكن استخراج المعطيات في الجدول التالي:

المنتجات / الأقسام	المرسيدس (x)	BMW (y)	تويوتا (z)	الطاقة المتاحة
المركز الأول	1	3	4	21
المركز الثاني	3	2	3	24
المركز الثالث	4	2	1	24

وبالتالي يمكن وضع المطلوب في صورة معادلات ثلاثة ذات ثلاثة مجاهيل (متغيرات) كما يلي: (بحيث تكون معادلة لكل مركز).

$$x + 3y + 4z = 21$$
$$3x + 2y + 3z = 24$$
$$4x + 2y + z = 24$$

حيث أن: (x) تمثل عدد السيارات الواجب إنتاجها من المرسيدس .

(y) تمثل عدد السيارات الواجب إنتاجها من BMW.

(z) تمثل عدد السيارات الواجب إنتاجها من تويوتا.

وبحل المعادلات الثلاثة باستخدام المحدد كما يلي:

1- إيجاد قيمة محدد المعاملات $|\Delta|$:

$$|\Delta| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 1\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 1\,[2-6] - 3\,[3-12] + 4\,[6-8]$$
$$= (1\times -4) - (3\times -9) + (4\times -2)$$
$$= -4 + 27 - 8 = 15$$

2-إيجاد قيمة محدد x $|\Delta x|$

$$|\Delta x| = \begin{vmatrix} 21 & 3 & 4 \\ 24 & 2 & 3 \\ 24 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

باستخدام الطريقة السابقة نجد أن:

$$|\Delta X| = 60$$

3- إيجاد قيمة محدد y وهو $|\Delta y|$

$$|\Delta y| = \begin{vmatrix} 1 & 21 & 4 \\ 3 & 24 & 3 \\ 4 & 24 & 1 \end{vmatrix}$$

وباستخدام الطريقة السابقة نجد أن:

$$|\Delta y| = 45$$

4- إيجاد قيمة محدد z وهو $|\Delta z|$ كما يلي:

$$|\Delta Z| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 21 \\ 3 & 2 & 24 \\ 4 & 1 & 24 \end{vmatrix}$$

وباستخدام الطريقة السابقة نجد أن:

$$|\Delta z| = 30$$

5- إيجاد قيمة x، y، z كما يلي:

$$X = \frac{|\Delta X|}{|\Delta|} = \frac{60}{15} = 4$$

$$Y = \frac{|\Delta Y|}{|\Delta|} = \frac{45}{15} = 3$$

$$Z = \frac{|\Delta Z|}{|\Delta|} = \frac{30}{15} = 2$$

ثانياً: المحددات وتوازن السوق:

1- توازن السوق لسلعة واحدة.

مثال: إذا كان دالة الطلب والعرض لسلعة ما على الصورة التالية:

$$2Q_d + P = 50$$

$$-\frac{1}{2}Qs + P = 25$$

المطلوب: باستخدام المحددات حدد الكمية التوازنية والسعر التوازني.

الحل: عند التوازن فإن الكمية المطلوبة = الكمية المعروضة = الكمية التوازنية.

$$Qd = Qs = Q$$

ولذلك فإن:

$$2Q + P = 50$$

$$-\frac{1}{2}Q + P = 25$$

1- إيجاد قيمة محدد المعاملات $|\Delta|$

$$|\Delta| = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{vmatrix} = 2 + \frac{1}{2} = 2.5$$

2- إيجاد قيمة محدد Q وهو $|Q|$

$$|Q| = \begin{vmatrix} 50 & 1 \\ 25 & 1 \end{vmatrix} = 50 - 25 = 25$$

3- إيجاد قيمة محدد P وهو $|P|$

$$|\Delta p| = \begin{vmatrix} 2 & 50 \\ -\frac{1}{2} & 25 \end{vmatrix} = 50 + 25 = 75$$

4- إيجاد قيمة P , Q

$$Q = \frac{|\Delta Q|}{|\Delta|} = \frac{25}{2.5} = 10$$

$$P = \frac{|\Delta p|}{|\Delta|} = \frac{75}{2.5} = 30$$

معنى ذلك أن توازن السوق يتحقق عندما Q = 10، p = 30

2- توازن السوق لسلعتين:

بافتراض أن هناك سلعتين فقط في السوق، وأن سعر كل من السلعتين يتأثر بسعر السلعة الأخرى، وبافتراض أن معادلات الطلب والعرض للسلعتين معادلات خطية، وبافتراض أن السوق في حالة توازن، بمعنى أن الكمية المعروضة من السلعتين تساوي الكمية المطلوبة منها، فإنه يمكن تحديد سعري التوازن وكميتي التوازن للسلعتين بحل معادلة توازن السلعة الأولى ومعادلة توازن السلعة الثانية معاً ويتضح ذلك من المثال التالي:

مثال: يفرض أن هناك علاقة بين سعر إحدى السلع وسعر السلعة الأخرى، وأن معادلتي الطلب لكل من السلعتين كما يلي:

$$Q_{d1} = 5 - p_1 + ,5p_2$$

$$Q_{d2} = 4 + 2p_1 - 3p_2$$

وأن معادلتي العرض لكل من السلعتين كما يلي:

$$Q_{s1} = ,5p_1 - 1,5$$

$$Q_{s2} = 5p_2 - 2$$

حيث أن:

Qd_1 , Qd_2 هي الكميات المطلوبة من كل من السلعتين (1، 2) بالوحدة.

Qs_1 , Qs_2 هي الكميات المعروضة من كل من السلعتين (1، 2) بالوحدة.

P_1 , P_2 سعر الوحدة من كل من السلعتين بالدولار.

المطلوب: أوجد مستويات الأسعار التي تحقق التوازن وكذلك كميات التوازن من كل من السلعتين.

خطوات الحل:

معادلة التوازن للسلعة الأولى:

$$Q_{d1} = Q_{s1}$$

$$5 - p_1 + ,5p_2 = ,5p_1 - 1,5$$

المعادلة رقم (1): $1,5p_1 - ,5p_2 = 6,5$

معادلة التوازن للسلعة الثانية:

$Q_{d2} = Q_{s2}$

$4 - 2p_1 + 3p_2 = 5p_2 - 2$

المعادلة رقم (2): $2p_1 - 8p_2 = -6$

ويحل معادلتي توازن السلعتين (1، 2) معاً باستخدام المحددات كما يلي:

$1,5p_1 - ,5p_2 = 6,5$

$2p_1 - 8p_2 = -6$

1-إيجاد قيمة محدد المعاملات $|\Delta|$

$$|\Delta| = \begin{vmatrix} 1,5 & -,5 \\ 2 & -8 \end{vmatrix}$$

$$|\Delta| = -12 + 1 = -11$$

2- إيجاد قيمة محدد P_1 وهو $|\Delta p_1|$

$$|\Delta P_1| = \begin{vmatrix} 6,5 & -,5 \\ -6 & -8 \end{vmatrix}$$

$$= -52 - 3 = -55$$

3- إيجاد قيمة محدد P_2 وهو $|\Delta p_2|$

$$|\Delta P_2| = \begin{vmatrix} 1,5 & 6,5 \\ 2 & -6 \end{vmatrix}$$

$$|\Delta P_2| = -9 - 13 = -22$$

4- إيجاد قيمة P_2 , P_1

$$P_1 = \frac{|\Delta P_1|}{|\Delta|} = \frac{-55}{-11} = 5$$

$$P_2 = \frac{|\Delta P_2|}{|\Delta|} = \frac{-22}{-11} = 2$$

ويمكن معرفة كميتي التوازن بالتعويض في المعادلات الأصلية للطلب والعرض كما يلي:

بالنسبة للسلعة الأولى:

$$Q_{d1} = 5 - p_1 + ,5p_2$$
$$= 5 - 5 \quad + ,5(2) = 1$$

كذلك:

$$Q_{s1} = ,5p_1 - 1,5$$
$$= ,5(5) - 1,5 = 1$$

بالنسبة للسلعة الثانية:

$$Q_{d2} = 4 + 2P_1 - 3P_2$$
$$= 4 + 2(2) - 3(2) = 8$$

كذلك:

$$Q_{s1} = ,5P_2 - 2$$
$$= 5(2) - 2 = 8$$

أي أن مستويات الأسعار والكميات التي تحقق التوازن في تلك السوق هي كما يلي:

السلعة الأولى: السعر 5 دولار للوحدة.

الكمية وحدة واحدة.

السلعة الثانية: السعر 2 دولار للوحدة.

الكمية 8 وحدات.

ثالثاً: المحددات وبدائل الاستثمار:

مثال: يحتاج أحد الأشخاص الذي أحيل إلى التقاعد مؤخراً إلى مبلغ 10000 دولار سنوياً كدخل إضافي، فإذا كان لديه الآن مبلغ 120000 دولار ويريد استثمارها في نوعين من السندات، بحيث أن النوع الأول يعطي عائد سنوي 10% والنوع الثاني يعطي عائد سنوي 8%.

المطلوب: تحديد المبلغ الواجب استثماره في سندات النوع الأول وكذلك المبلغ الواجب استثماره في سندات النوع الثاني بما يحقق له الدخل السنوي المطلوب.

الحل:

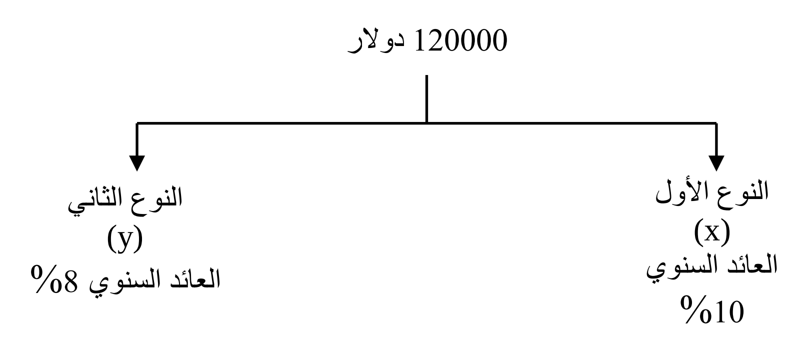
المعطيات:

-الإيراد السنوي المطلوب هو 10000 دولار.

- نفرض أن المبلغ الواجب استثماره في النوع الأول من السندات (x) والذي يعطي عائد سنوي 10%.

- نفرض أن المبلغ الواجب استثماره في النوع الثاني من السندات (y) والذي يعطي عائد سنوي 8%.

- إجمالي المبلغ الواجب استثماره 120000 دولار ويمكن توضيح ذلك كما يلي:



إجمالي العائد السنوي المطلوب 10000 دولار

ويمكن التعبير عن ذلك من خلال المعادلات الآتية:

$$x + y = 120000$$
$$,10x + ,08y = 10000$$

وبحل المعادلتين باستخدام المحددات نجد أن:

1- إيجاد محدد المعاملات $|\Delta|$

$$|\Delta| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ ,10 & ,08 \end{vmatrix}$$
$$,08 - ,10 = -,02$$

2- إيجاد محدد x وهو $|\Delta x|$

$$|\Delta x| = \begin{vmatrix} 120000 & 1 \\ 10000 & ,08 \end{vmatrix}$$
$$|\Delta x| = 9600 - 10000 = -400$$

3- إيجاد محدد y وهو $|\Delta y|$

$$|\Delta y| = \begin{vmatrix} 1 & 120000 \\ ,10 & 10000 \end{vmatrix}$$
$$= 10000 - 12000 = -2000$$

4- إيجاد قيمة x، y كما يلي:

$$x = \frac{|\Delta x|}{|\Delta|} = \frac{-400}{-,02} = 20000$$
$$y = \frac{|\Delta y|}{|\Delta|} = \frac{-2000}{-,02} = 100000$$

أي أن المبلغ الواجب استثماره في النوع الأول من السندات هم 20000 دولار. والمبلغ الواجب استثماره في النوع الثاني من السندات هو 100000 دولار.

رابعاً: المحددات وتوازن الدخل القومي:

ونقتصر في دراستنا لتوازن الدخل القول على التوازن العام في السوقين السلعية والنقدية، وهي حالة يحدث فيها توازن آني (في نفس الوقت) في جميع الأسواق في الاقتصاد، وحيث أنه يوجد سوقين هي سوق السلع والخدمات، وسوق النقد، فإن التوازن العام يعني حدوث توازن في سوق السلع والخدمات وفي نفس الوقت حدوث توازن في سوق النقد ويمكن التعبير رياضياً عن التوازن العام بمساواة معادلتي IS , LM كما يلي:

مثال: في ضوء المعطيات الآتية:

$C = ,8y + 100$

$I = - 20r + 1000$

$Ms = 2375$

$L1 = ,10y$

$L2 = - 25r + 2000$

حدد مستوى الدخل التوازني ومستوى سعر الفائدة التوازني.

خطوات الحل:

1- المعلومات الخاصة بسوق السلع والخدمات.

$$C = ,8y + 100$$
$$I = -20r + 1000$$

حيث أن: (C) دالة الاستهلاك

(I) دالة الاستثمار والادخار.

(y) الدخل

(r) معدل الفائدة

عند التوازن فإن:

$$y = C + I$$
$$y = ,8y + 100 - 20r + 1000$$
$$y - ,8y - 20r + 1100$$

المعادلة رقم (1) (IS) $\quad ,2y + 20r = 1100$

2- المعلومات الخاصة بسوق النقد:

$$Ms = 2375$$
$$L_1 = ,10y$$
$$L_2 = -25r + 2000$$

حيث أن:

M_s: الكمية المعروضة من النقود.

L_1: هي الطلب على النقود بفرض الاستهلاك والادخار.

L_2: هي الطلب على النقود بغرض الاستثمار.

M_d: الكمية المطلوبة من النقود حيث أن:

$$M_d = L_1 + L_2$$
$$\therefore M_d = 0,10y - 25r + 2000$$

عند التوازن:

$$M_d = M_s$$
$$,10y - 25r + 2000 = 2375$$

المعادلة رقم (2) معادلة (LM): $,10y - 25r = 375$

بحل المعادلتين (1)، (2) معاً باستخدام المحددات كما يلي:

$$,2y + 20r = 1100$$
$$,10y - 25r = 375$$

1- إيجاد محدد المعاملات $|\Delta|$.

$$|\Delta| = \begin{vmatrix} ,2 & 20 \\ ,1 & -25 \end{vmatrix}$$
$$= -5 - 2 = -7$$

2- إيجاد محدد y وهو $|\Delta y|$.

$$|\Delta y| = \begin{vmatrix} 1100 & 20 \\ 375 & -25 \end{vmatrix}$$
$$= -27500 - 7500 = -35000$$

3- إيجاد محدد r وهو $|\Delta r|$.

$$|\Delta r| = \begin{vmatrix} ,2 & 1100 \\ ,1 & 375 \end{vmatrix}$$
$$= 75 - 110 = -35$$

4- إيجاد قيمة y، r كما يلي:

$$y = \frac{|\Delta y|}{|\Delta|} = \frac{35000}{-7} = 5000$$
$$r = \frac{|\Delta r|}{|\Delta|} = \frac{-35}{-7} = 5$$

أي أن الدخل التوازني هو 5000 ومعدل الفائدة التوازني هو 5%.

مثال(2): حدد الدخل التوازني ومعدل الفائدة التوازني في ضوء المعلومات الآتية:

- المعلومات الخاصة بسوق السلع والخدمات.

$$C = ,7y + 85$$
$$I = -50r + 1200$$

- المعلومات الخاصة بسوق النقد.

$M_s = 500$
$M_d = ,2y - 40r + 230$

خطوات الحل:

1- توازن سوق السلع والخدمات (IS).

$y = C + I$
$y = ,7y + 85 - 50r + 1200$

المعادلة رقم (1): $,3y + 50r = 1285$

2- توازن سوق النقد (LM):

$M_d = M_s$
$,2y - 40r + 230 = 500$

المعادلة رقم (2): $,2y - 40r = 270$

بحل المعادلتين (1)، (2) باستخدام المحددات تحصل على السعر التوازني والفائدة التوازنية:

$,3y + 50r = 1285$
$,2y - 40r = 270$

1- إيجاد محدد المعاملات $|\Delta|$.

$$|\Delta| = \begin{vmatrix} ,3 & 50 \\ ,2 & -40 \end{vmatrix}$$
$$= -12 - 10 = -22$$

2- إيجاد محدد y وهو $|\Delta y|$.

$$|\Delta y| = \begin{vmatrix} 1285 & 50 \\ 270 & -40 \end{vmatrix}$$
$$= -51400 - 13500 = -64900$$

3- إيجاد محدد r وهو $|\Delta r|$.

$$|\Delta r| = \begin{vmatrix} ,3 & 1285 \\ ,2 & 270 \end{vmatrix}$$

$$= 81 - 257 = -176$$

4- فإن قيم y، r كما يلي:

$$y = \frac{|\Delta y|}{|\Delta|} = \frac{-64900}{-22} = 2950$$

$$r = \frac{|\Delta r|}{|\Delta|} = \frac{-176}{-22} = 8\%$$

وبذلك فإن الدخل التوازني هو 2950 ومعدل الفائدة التوازني هو 8%.

الباب الثالث

3

المصفوفات

Matrices

- **الفصل الأول: طبيعة المصفوفات الجبرية عليها**
- **الفصل الثاني: استخدام المصفوفات في حل المشاكل الاقتصادية والإدارية والمالية**


الفصل الأول
طبيعة المصفوفات
والعمليات الجبرية عليها
Matrices Algebra
and Their Operations
1

الفصل الأول
طبيعة المصفوفات والعمليات الجبرية عليها
Matrices Algebra and Their Operations

1- تعريف المصفوفة:

تعرف المصفوفة على أنها شكل أو منظومة رياضية تشمل مجموعة من العناصر (الأرقام أو الرموز) مرتبة في شكل صفوف وأعمدة وليس شرطاً أن يتساوى عدد الصفوف مع عدد الأعمدة -بمعنى أنها تأخذ شكل مستطيل أو مربع- ولا يمكن حل أو فك المصفوفة وحساب قيمة لها، وتستخدم المصفوفات في حل بعض المشاكل الاقتصادية والإدارية الهامة والتي يمكن التعبير عنها في صورة معادلات خطية.

1-1- الشكل العام للمصفوفة:

يرمز للمصفوفة بالحروف الكبيرة Capital letters، مثل (A, B, C) ويرمز للعناصر أو الأرقام التي تتكون منها المصفوفة بالحروف الصغيرة Small letters، مثل (a, b, c) فمثلاً [A] تحتوي على العناصر (a_{ij}) ويكون لها عدد (i) من الصفوف وعدد (j) من الأعمدة، وتأخذ المصفوفة الشكل التالي:

$$A(m,n)=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{1j} \\ a_{21} & a_{22} & & & a_{2j} \\ \vdots & & & & \\ \vdots & & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & & & a_{mn} \end{bmatrix}$$

وتعرف المصفوفة أعلاه بأنها تتكون من عدد (m) من الصفوف (rows) وعدد (n) من الأعمدة (columns) وتكتب [A]mn.

وتقرأ المصفوفة m × n أو المصفوفة من الدرجة mn ويمثل العنصر a_{ij} العنصر الذي يقع في الصف (i) وفي العمود (j)، فمثلاً (a_{23}) تمثل العنصر الذي يقع في الصف الثاني والعمود الثالث. وهو العنصر الذي أحيط بدائرة في المصفوفة التالية:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & (6) \\ -2 & -1 & 5 \end{bmatrix}$$

2- أنواع أو أشكال المصفوفات:

تتعدد أنواع أو أشكال المصفوفات وفقاً لعدد الصفوف وعدد الأعمدة كما يلي:

2-1- المتجه الأفقي Row Vector

وهو مصفوفة مكونة من صف واحد وأي عدد من الأعمدة كما يلي:

فمثلاً: $[A_{12}]$ هو $[5 \quad 3]$ ← متجه أفقي من صف واحد وعمودين.

فمثلاً: $[A_{13}]$ هو $[3 \quad 2 \quad 1]$ ← متجه أفقي من صف واحد وثلاثة أعمدة.

2-2- المتجه الرأسي Column Vector

وهي مصفوفة مكونة من عمود واحد وأي عدد من الصفوف كما يلي:

فمثلاً: $\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ متجه رأسي مكون من عمود واحد وصفان $[A_{21}]$.

فمثلاً: $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}$ متجه رأسي مكون من عمود واحد وثلاثة صفوف $[A_{31}]$.

فمثلاً: $\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix}$ متجه رأسي مكون من عمود واحد وأربعة صفوف $[A_{41}]$

2-3- المصفوفة الصفرية Zero Matrix

هـي المصـفوفة التـي جميـع عناصـرها أصـفار، بمعنـى أنـه يطلـق علـى المصـفوفة اسـم المصـفوفة الصـفرية (Zero matrix or null matrix) إذا كـان كل عنصر من عناصر المصفوفة يساوي صفراً.

$$\left[A_{mn}\right]=\left[O_{mn}\right]=\begin{bmatrix}0&0&0&\cdots&0\\0&0&0&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\\0&0&0&\cdots&0\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$$

2-4- المصفوفة المربعة: Square Matrix

هي المصفوفة التي يكون عدد صفوفها مساوياً لعدد أعمدتها، بمعنى أن المصفوفة تسمى مصفوفة مربعة إذا كـان عدد الصفوف بها يسـاوي عدد الأعمدة $(m = n)$ ويرمز للمصفوفة المربعة التي تحتوي علـى عدد (n) من الصفوف وعدد (n) من الأعمدة بأنها مصفوفة من الدرجة (n) ويطلق على مجموعة العناصر القطرية $(a_{11}\ \ a_{22}\ \ a_{32}\ ....\ \ A_{nn})$ عناصر القطر الرئيسي (Principal Diagonal).

فمثلاً:

$$\begin{bmatrix}2&3\\4&5\end{bmatrix}$$

هي مصفوفة مربعة مكونة من صفين وعمودين.

فمثلاً:

$$\begin{bmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{bmatrix}$$

هي مصفوفة مربعة مكونة من ثلاثة صفوف وثلاثة أعمدة.

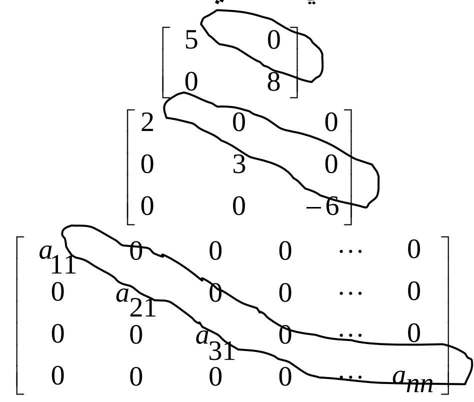
$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

هي مصفوفة مربعة مكونة من عدد (n) من الصفوف وعدد (n) من الأعمدة.

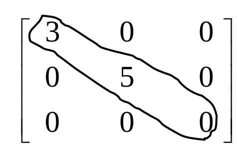
ويعرف القطر الرئيسي بأنه القطر أو المحور الذي يتكون من صف العناصر الذي يمتد من الركن العلوي الشمالي الغربي إلى الركن السفلي الجنوبي الشرقي.

2-5- المصفوفة القطرية Diagonal Matrix

تعرف المصفوفة القطرية بأنها مصفوفة مربعة قطرية إذا كان كل عنصر فيها لا يقع على القطر الرئيسي يساوي صفراً. مثل:



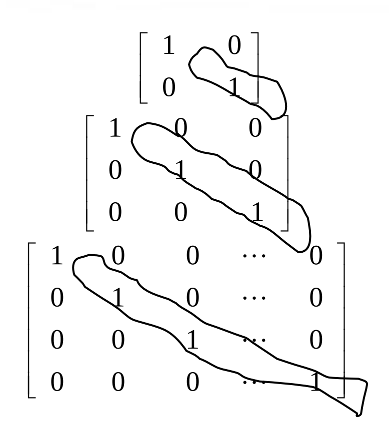
هذا وقد تكون بعض عناصر القطر الرئيسي أصفاراً، فمثلاً:



2-6- مصفوفة الوحدة Unit Matrix

هي مصفوفة مربعة جميع عناصرها = صفراً ما عدا عناصر القطر الرئيسي فتساوي الواحد الصحيح.

مثل:



7-2- المصفوفة المثلثية Triangular Matrix

المصفوفة المثلثية هي عبارة عن مصفوفة مربعة تأخذ الشكل التالي:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

مثل(1):

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

مثل(2):

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 0 \\ & 6 & 5 \end{bmatrix}$$

يلاحظ أن المصفوفة المثلثية هي المصفوفة التي يكون كل عنصر على يمين (أو على يسار) القطر الرئيسي يساوي صفراً، كما يمكن أن تكون بعض عناصر القطر الرئيسي تساوي أصفاراً.

8-2- المصفوفات المتناظرة أو المتماثلة Symmetric Matrix

يقال عن المصفوفة المربعة أنها متماثلة أو متناظرة إذا كان $a_{ij} = a_{ji}$ لكل قيم i , j. وعلى ذلك فإنه يقال أن المصفوفة متماثلة إذا كانت العناصر على يمين القطر الرئيسي مماثلة للعناصر على يسار هذا القطر.

$$[A]=\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 5 & 4 \\ 0 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

3- العمليـــات الجبريـــة علـــى المصـــفوفات Matrix Operations

3-1- تساوي المصفوفات Matrix equality

يقال أن مصفوفتين $[A] = (a_{ij})$، $[B] = (b_{ij})$ متساويتان إذا توافر شرطان هما:

- إذا كانت المصفوفتان من الدرجة نفسها أي أنهما تحتويـان علـى نفس العدد من الصفوف والأعمدة.
- إذا كان كل عنصر في أيهما مساوياً العنصر المقابل له في المصفوفة الأخـــــــــــــــــــــــــــــــــرى $a_{ij} = b_{ij}$ لكل قيم i, j.

فمثلاً: إذا تساوت المصفوفتان:

$$\begin{bmatrix} 2a & \frac{1}{2}b \\ c+3 & d-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 10 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$$

فإن معنى ذلك أن:

$$\begin{aligned} 2a &= 8 \quad\rightarrow\quad a = 4 \\ \frac{1}{2}b &= 10 \quad\rightarrow\quad b = 20 \\ c+3 &= 5 \quad\rightarrow\quad c = 2 \\ d-1 &= 7 \quad\rightarrow\quad d = 8 \end{aligned}$$

فمثلاً إذا تساوت المصفوفتان:

$$\begin{bmatrix} a+b & 2c+d \\ a-b & c-d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

فإن معنى ذلك أن:

$$a+b=3$$
$$2c+d=5$$
$$a-b=1$$
$$c-d=4$$

وبناء على ذلك تكون المصفوفتان متساويتين عندما:

$a = 2$, $b = 1$, $c = 3$, $d = -1$

3-2- جمع وطرح المصفوفات:

لجمع أو طرح مصفوفتان (أو أكثر) يشترط أن يكونا متماثلتين بمعنى أن يكونا من نفس الرتبة أي أنهما يحتويان على نفس العدد من الصفوف والأعمدة ويكون الناتج مصفوفة بها نفس العدد من الصفوف والأعمدة.

بمعنى أن:

عدد الصفوف في المصفوفة الأولى = عدد الصفوف في المصفوفة الثانية.

عدد الأعمدة في المصفوفة الأولى = عدد الأعمدة في المصفوفة الثانية.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & a_{13}+b_{13} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & a_{23}+b_{23} \\ a_{31}+b_{31} & a_{32}+b_{32} & a33+b_{33} \end{bmatrix}$$

فمثلاً: إذا كان لدينا مصفوفتان A, B كما يلي:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

أوجد: 1- المصفوفة [A + B]

2- المصفوفة [B + A]

3- المصفوفة [A - B]

4- المصفوفة [B - A].

خطوات الحل:

1- المصفوفة [A + B].

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 0 \\ 4 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

2- المصفوفة [B + A]

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 0 \\ 4 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

3- المصفوفة [A - B]

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 0 \\ -2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

4- المصفوفة [B - A].

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -5 & 0 \\ 2 & -3 & -1 \end{bmatrix}$$

ويلاحظ أن:

$$[A] + [B] = [B] + [A]$$
$$[A] - [B] \neq [B] - [A]$$

3-3- ضرب المصفوفات Multiplication of Matrix

يشترط لضرب مصفوفتين أن يكون:

عدد أعمدة المصفوفة الأولى = عدد صفوف المصفوفة الثانية

معنى ذلك أنه لكي نستطيع ضرب أي مصفوفتين B × A لا بد وأن يكون المصفوفتان قابلتان للضرب أي أن المصفوفة A تضرب في المصفوفة B ويتحقق ذلك إذا كان عدد أعمدة المصفوفة A مساوياً لعدد الصفوف في المصفوفة B والسبب في ذلك أنه عند ضرب المصفوفات

نضرب عناصر كل صف من صفوف المصفوفة الأولى في عناصر كل عمود من أعمدة المصفوفة الثانية.

فإذا كان لدينا المصفوفة A_{34} وهي مصفوفة مكونة من ثلاثة صفوف وأربعة أعمدة، فإنه يشترط لصحة الضرب أن تكون المصفوفة الثانية بها 4 صفوف وأي عدد من الأعمدة. ويكون الناتج مصفوفة بها عدد صفوف المصفوفة الأولى وعدد أعمدة المصفوفة الثانية كما يلي:

$$A_{34} \times B_{41} = C_{31}$$

$$A_{34} \times B_{42} = C_{32}$$

$$A_{34} \times B_{43} = C_{33}$$

$$A_{34} \times B_{44} = C_{34}$$

$$A_{34} \times B_{45} = C_{35}$$

ويتم الضرب على النحو التالي:

- يتم ضرب عناصر الصف الأول بالمصفوفة الأولى × عناصر العمود الأول، ثم × عناصر العمود الثاني، ثم × عناصر العمود الثالث بالمصفوفة الثانية لينتج لنا عناصر الصف الأول بالمصفوفة الجديدة.
- يضرب عناصر الصف الثاني بالمصفوفة الأولى × عناصر العمود الأول، ثم × عناصر العمود الثاني، ثم × عناصر العمود الثالث بالمصفوفة الثانية لينتج لنا عناصر الصف الثاني بالمصفوفة الجديدة.
- وهكذا ...

مثال: أوجد حاصل ضرب المصفوفتين:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 1 & 6 & 1 \end{bmatrix}$$

أوجد:

$$[A \times B]$$
$$[B \times A]$$

خطوات الحل:

$$\underset{\uparrow\underline{\qquad = \qquad}\uparrow}{A_{22} \times B_{23}} = C_{23}$$

إذن متوافر شرط الضرب:

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 1 & 6 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (4\times2)+(2\times1) & (4\times4)+(2\times6) & (4\times5)+(2\times1) \\ (3\times2)+(5\times1) & (3\times4)+(5\times6) & (3\times5)+(5\times1) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 8+2 & 16+12 & 20+2 \\ 6+5 & 12+30 & 15+5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 10 & 28 & 22 \\ 11 & 42 & 20 \end{bmatrix}$$

- بينما ضرب [A] × [B]

$$\underset{\uparrow\underline{\qquad \neq \qquad}\uparrow}{B_{2\times3} \times A_{2\times3}}$$

لا يمكن إجراء عملية الضرب بسبب عدم توافر الشرط الأساسي للضرب وهو أن عدد أعمدة المصفوفة الأولى لا يساوي عدد صفوف المصفوفة الثانية.

مثال(1): إذا كان لدينا المصفوفتين A , B.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 7 \\ 0 & 9 \end{bmatrix} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} 5 & -4 \\ 12 & 3 \end{bmatrix}$$

أوجد:

$$[A \times B]$$
$$[B \times A]$$

خطوات الحل:

$$A_{32} \times B_{22} = C_{32}$$

$$=$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 7 \\ 0 & 9 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 5 & -4 \\ 12 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 10+12 & -8+3 \\ -15+84 & 12+21 \\ 0+108 & 0+27 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 22 & -5 \\ 69 & 33 \\ 108 & 27 \end{bmatrix}$$

$$B_{22} \times A_{32}$$

$$\neq$$

لا يمكن إجراء عملية الضرب بسبب عدم توافر الشرط.

مثال(2): أوجد ضرب A , B:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 8 \end{bmatrix}$$

$$A \times B = C$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 8 \end{bmatrix}$$

$$= [-4+3+24] = [23]$$

مثال(3): أوجد حاصل ضرب $A \times B$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

الحل:

$$A_{3\times2} \times B_{2\times1} = C_{31}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 6+3 \\ -3+4 \\ 0+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

3-4- ضرب كمية ثابتة في المصفوفة:

لضرب كمية ثابتة في مصفوفة يتم ضربها في كل عناصر المصفوفة.

فمثلاً إذا كان لدينا المصفوفة A على الشكل:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}$$

أوجد:

- A5
- -2 A

خطوات الحل:

$$5A = \begin{bmatrix} 10 & 15 \\ 25 & -5 \end{bmatrix}$$

$$-2A = \begin{bmatrix} -4 & -6 \\ -10 & 2 \end{bmatrix}$$

5- معكوس المصفوفة

Inverse of the Matrix

لإيجاد معكوس المصفوفة يشترط أن تكون المصفوفة مربعة -بمعنى أن عدد الصفوف يساوي عدد الأعمدة- وتكون المصفوفة غير منفردة بمعنى أن قيمة المحدد $\neq$ صفر.

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}$$

فإذا كان لدينا مصفوفة الوحدة I فإن:

$$AI = A$$
$$IA = A$$
$$A^{-1}A = I$$

أي أن حاصل ضرب المصفوفة × معكوسها يساوي مصفوفة الوحدة ولنفترض أن لدينا المصفوفة A وهي مصفوفة مربعة وغير منفردة (قيمة المحدد ≠ صفر).

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

أ) إيجاد معكوس مصفوفة من الدرجة الثانية (2 × 2).

فإذا كان لدينا المصفوفة A_{22} وهي مصفوفة مربعة وغير منفردة وكذلك مصفوفة الوحدة.

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \quad , \quad I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

فإن:

$$|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$$

إذا كان لدينا المصفوفة

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

فإنه يتم إيجاد معكوس المصفوفة بإحدى الطريقتين:

أولاً: إيجاد معكوس المصفوفة باستخدام المحددات:

عند استخدام المحددات في إيجاد معكوس المصفوفة نتبع الخطوات التالية:

1- إيجاد قيمة محدد مصفوفة [A] كما يلي:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

$$|\Delta| = ad - cb$$

2- إيجاد المصفوفة المبدلة. وهي المصفوفة التي يتم تبديل عناصر القطر الرئيس وتغيير إشارات عناصر القطر الفرعي كما يلي:

$$\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

3- إيجاد معكوس المصفوفة:

$$A^{-1} = \frac{1}{|\Delta|} [\text{المصفوفة المبدلة}]$$

$$= \frac{1}{ad - cb} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

ثانياً: إيجاد معكوس المصفوفة باستخدام طريقة التخفيض المحوري:

حيث أن ناتج حاصل ضرب المصفوفة من معكوسها يساوي مصفوفة الوحدة كما يلي:

$$A \times A^{-1} = I$$

وبذلك فإنه يتم كتابة مصفوفة الوحدة بجوار المصفوفة ثم القيام بإجراء العمليات الرياضية على المصفوفتين بحيث يتم تحويل مصفوفة إلى مصفوفة الوحدة وبذلك تحويل مصفوفة الوحدة إلى معكوس المصفوفة.

$$\left[\begin{array}{cc|cc} a & b & 1 & 0 \\ c & d & 0 & 1 \end{array}\right]$$

فإنه يتم تحويل العنصر a إلى واحد صحيح والعنصر c إلى صفر والعنصر d إلى واحد صحيح والعنصر b إلى صفر على أن تشمل العمليات الرياضية المصفوفتين معاً فإن ناتج تحويل مصفوفة الوحدة يكون هو معكوس المصفوفة.

مثال: إذا كان المصفوفة (A) هي:

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

المطلـوب: أوجـد معكـوس المصـفوفة بطريقتـي المحـددات والتخفـيض المحوري.

الحل:

أ) إيجاد معكوس المصفوفة باستخدام طريقة المحددات:

1- إيجاد قيمة محدد المصفوفة Δ .

$$\Delta = (2 \times 3) - (1 \times 4) = 6 - 4 = 2$$

2- إيجـاد المصـفوفة المبدلـة (تبـديل عناصـر القطـر الرئيسـي وتغييـر إشارات عناصر القطر الفرعي).

$$\begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

3- معكوس المصفوفة هو:

$\frac{1}{\Delta}$ A^{-1} =[المصفوفة المبدلة]

$$= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -2 \\ \frac{-1}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

ويتم التأكد من صـحة الحل عن طريـق ضـرب المصـفوفة × معكوسـها يكون الناتج مصفوفة الوحدة.

$$A^{-1} \ A = I$$

$$\begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -2 \\ \frac{-1}{2} & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3-2 & 6-6 \\ -1+1 & -2+3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ب) إيجاد معكوس باستخدام طريقة التخفيض المحوري كما يلي:

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

- بقسمة عناصر الصف الأول على 2.

$$\overline{R_1} = \frac{R_1}{2}$$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

- بطرح الصف الأول من الصف الثاني.

$$\overline{R_1} = \frac{R_1}{2}$$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

- بضرب الصف الثاني × 2 وطرحه من الصف الأول.

$$\overline{R_1} = R_1 - 2R_2$$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{3}{2} & -2 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 1 \end{array}\right]$$

يكون معكوس المصفوفة هو:

$$\begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -2 \\ \frac{-1}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

ب) إيجاد معكوس مصفوفة من الدرجة الثالثة (3 ×3).

لإيجاد معكوس مصفوفة من الدرجة الثالثة (ذات ثلاثة صفوف وثلاثة أعمدة) يتم استخدام إما طرقة المحددات أو طريقة التخفيض المحوري، كما يلي:

أولاً: إيجاد معكوس المصفوفة باستخدام طريقة المحددات:

عند استخدام المحددات في إيجاد معكوس مصفوفة من الدرجة الثالثة يتم اتباع الخطوات التالية:

1- إيجاد قيمة محدد المصفوفة $|\Delta|$ وذلك باحدى الطريقتين السابق شرحهما في الباب الخاص بالمحددات.

2- إيجاد مصفوفة المرافقات (Co Factors): ويقصد بها إيجاد قيم محددات عناصر المصفوفة وهي المحددات الناتجة بعد حذف الصف والعمود الذي به العنصر، حيث أن المصفوفة $[A]\ 3 \times 3$ بها ثلاثة (3) عناصر ولهذا يكون لها عدد (9) مرافقات، ومرافق العنصر a_{ij} هو المحدد الناتج لمصفوفة (2×2) وذلك بعد حذف الصف (i)، والعمود (j) الذي به العنصر (a_{ij}).

3- إيجاد قيم المرافقات، وهي قيم محددات العناصر (المرافقات) مضروبة في مصفوفة الإشارات المقابلة (قاعدة الإشارات) والتي تأخذ الشكل التالي:

$$\begin{bmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{bmatrix}$$

4- إيجاد المصفوفة المبدلة: وهي نفس مصفوفة المرافقات بعد تبديل الصفوف محل الأعمدة والأعمدة محل الصفوف بمعنى جعل الصفوفة أعمدة والأعمدة صفوف.

5- معكوس المصفوفة = مقلوب قيمة المحدد × المصفوفة المبدلة.

$$A^{-1} = \frac{1}{|\Delta|} \times [\text{المصفوفة المبدلة}]$$

ثانياً: إيجاد معكوس المصفوفة باستخدام طريقة التخفيض المحوري:

أوضحنا فيما سبق أن حاصل ضرب المصفوفة في معكوسها يساوي مسفوفة الوحدة أي:

$$A \times A^{-1} = I$$

وبذلك يتم كتابة مصفوفة الوحدة بجوار المصفوفة المطلوب إيجاد معكوسها [A]، ثم القيام بإجراء العمليات الرياضية على المصفوفتين بحيث يتم تحويل المصفوفة الأساسية [A] إلى مصفوفة الوحدة وبذلك تتحول مصفوفة الوحدة إلى معكوس المصفوفة

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 1 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 & 1 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

حيث يتم استخدام العمليات الرياضية لتحويل عناصر المصفوفة الأساسية [A] إلى أصفار باستثناء عناصر القطر الرئيسي فإنه يتم تحويلها إلى واحد صحيح وبذلك نجد أن مصفوفة الوحدة تتحول إلى معكوس المصفوفة وذلك كما يلي:

مثال 2: أوجد معكوس المصفوفة باستخدام المحددات:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 2 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

خطوات الحل:

يتم إيجاد معكوس المصفوفة باستخدام المحددات باتباع الخطوات التالية:

1- إيجاد قيمة محدد المصفوفة Δ.

$$\Delta = 3\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 3(4-2) - 2\,(8-4) + 5\,(4-4)$$

$$= (3\times 2) \quad - (2\times 4) \quad + \ (5\times 0)$$

$$= \ 6 \quad - \quad 8 \quad + \quad 0 \quad = -2$$

2- إيجاد مصفوفة المرافقات (محددات العناصر) مع ملاحظة قاعدة الإشارات التالية.

$$\begin{bmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{bmatrix}$$

قيم المحددات الصغرى المرافقة لجميع عناصر المصفوفة وتأخذ الرموز التالية:

$$\begin{bmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{12} & \Delta_{13} \\ \Delta_{21} & \Delta_{22} & \Delta_{23} \\ \Delta_{31} & \Delta_{32} & \Delta_{33} \end{bmatrix}$$

حيث يتم حذف الصف والعمود الذي به العنصر وأخذ باقي العناصر كما يلي:

محددات (مرافقات) الصف الأول:

$$\Delta_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 4 - 2 = 2$$

$$\Delta_{12} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} = 8 - 4 = 4$$

$$\Delta_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 4 = 0$$

محددات (مرافقات) الصف الثاني:

$$\Delta_{21} = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 8 - 10 = -2$$

$$\Delta_{22} = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} = 12 - 20 = -8$$

$$\Delta_{23} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 6 - 8 = -2$$

محددات (مرافقات) الصف الثالث:

$$\Delta_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 5 = -3$$

$$\Delta_{32} = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} = 12 - 20 = -8$$

$$\Delta_{33} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3 - 4 = -1$$

ويمكن وضعها في المصفوفة التالية:

$$\begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} \\ 8-2 & 8-4 & 4-4 \\ (2) & (4) & (0) \\ \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} \\ 8-10 & 12-20 & 6-8 \\ (-2) & (-8) & (-2) \\ \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \\ 2-5 & 3-10 & 3-4 \\ (-3) & (-7) & (-1) \end{bmatrix}$$

مصفوفة المرافقات هي:

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 \\ -2 & -8 & -2 \\ -3 & -7 & -1 \end{bmatrix}$$

مع ملاحظة قاعدة الإشارات يكون:

$$\begin{bmatrix} 2 & -4 & 0 \\ 2 & -8 & 2 \\ -3 & 7 & -1 \end{bmatrix}$$

3- المصفوفة المبدلة: جعل الصفوف أعمدة والأعمدة صفوف.

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & -3 \\ -4 & -8 & 7 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

4- يكون معكوس المصفوفة كما يلي:

$A^{-1} = \frac{1}{\Delta}$ [المصفوفة المبدلة]

$$= \frac{1}{-2}\begin{bmatrix} 2 & 2 & -3 \\ -4 & -8 & 7 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{-2}{2} & \frac{-2}{2} & \frac{3}{2} \\ \frac{4}{2} & \frac{8}{2} & \frac{-7}{2} \\ 0 & \frac{-2}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

مثـــال (2):إيجـــاد معكـــوس المصـــفوفة باســـتخدام طريقـــة التخفـــيض المحوري:

فمثلاً إذا كانت المصفوفة A هي:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 3 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

خطوات الحل:

يتم إيجاد معكوس المصفوفة باستخدام طريقة المرافقات باتباع الخطوات التالية:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\overline{R}2 = R_2 - 3R_1$$

$$\begin{array}{lcccccc} R_2 \rightarrow & 3 & 3 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 3R_1 \rightarrow & 3 & 6 & -6 & 3 & 0 & 0 \\ \hline \overline{R_2} & 0 & -3 & 5 & -3 & 1 & 1 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 5 & -3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\overline{R_3} = R_3 - 2R_1$$

$$\begin{array}{lcccccc} R_3 \rightarrow & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 3R_1 \rightarrow & 2 & 4 & -4 & 2 & 0 & 0 \\ \hline \overline{R_3} & 0 & -3 & 4 & -2 & 0 & 1 \end{array}$$

يكون لدينا:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 5 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 4 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\overline{R}_2 = \frac{R_2}{-3}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{-5}{3} & 1 & \frac{-1}{3} & 0 \\ 0 & -3 & 4 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\overline{R_1} = R_1 - 2R_2$$

$$\begin{array}{lcccccc} R_1 \rightarrow & 1 & 2 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 2R_2 \rightarrow & 0 & 2 & \frac{-10}{3} & 2 & \frac{-3}{2} & 0 \\ \hline & 1 & 0 & \frac{4}{3} & -1 & \frac{+3}{2} & 0 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \frac{4}{3} & -1 & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{-5}{3} & 1 & \frac{-1}{3} & 0 \\ 0 & -3 & 4 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\overline{R_3} = R_3 - 3R_2$$

$$\begin{array}{lcccccc} R_3 \rightarrow & 0 & -3 & 4 & -2 & 0 & 1 \\ 3R_2 \rightarrow & 0 & 3 & -5 & 3 & -1 & 0 \\ \hline & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \frac{4}{3} & -1 & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{-5}{3} & 1 & \frac{-1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\overline{R_3} = \frac{R_3}{-1}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \frac{4}{3} & -1 & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{-5}{3} & 1 & \frac{-1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & +1 & -1 & 1 & -1 \end{array}\right]$$

$$\overline{R_2} = R_2 + \frac{5}{3} R_3$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \frac{4}{3} & -1 & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{-2}{3} & \frac{4}{3} & \frac{-5}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{array}\right]$$

$$\overline{R_1} = R_1 - \frac{4}{3} R_3$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{-2}{3} & \frac{4}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{-2}{3} & \frac{4}{3} & \frac{-5}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{array}\right]$$

وبذلك يكون معكوس المصفوفة هو:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{-2}{3} & \frac{4}{3} \\ \frac{-2}{3} & \frac{4}{3} & \frac{-5}{3} \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

6- استخدام المصفوفات في حل المعادلات الخطية:

تعتبر المصفوفات من الأساليب الرياضية التي تستخدم كثيراً في حل النماذج الرياضية، وبصفة خاصة تلك التي تعتمد عليها الإدارة العليا في المشروع في اتخاذ القرارات الإدارية مثل تخطيط الإنتاج أو خليط عناصر الإنتاج، أو تحديد عدد الوحدات الواجب إنتاجها في ضوء الإمكانيات أو الطاقة المتاحة، فإذا كان لدينا المعادلات الخطية التالية فإنه يمكن استخدام المصفوفات في حلها كما يلي:

6-1- حل معادلتين ذات متغيرين:

$$a_{11}x + a_{12}y = b_1$$

$$a_{21}x + a_{22}y = b_2$$

- مصفوفة المعاملات:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

- مصفوفة المتغيرات:

$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

- مصفوفة (متجه الثوابت):

$$b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

$$ax = b$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \div \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

ثـم إيجـاد معكـوس مصـفوفة المعـاملات بـأي مـن الطـرق السـابقة وبالتعويض في المعادلة وإيجاد قيم المتغيرات.

2-6- حل ثلاث معادلات ذات ثلاثة متغيرات:

$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1$

$a_{21}x_2 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2$

$a_{31}x_3 + a_{32}x_3 + a_{33}x_3 = b_3$

- مصفوفة المعاملات:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

- مصفوفة المتغيرات:

$$X = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix}$$

- مصفوفة الثوابت:

$$b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

AX = b

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}^{-1} \times \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

[مصفوفة الثوابت] × [معكوس مصفوفة المعاملات] = [مصفوفة المتغيرات]

حيث يتم إيجاد معكوس مصفوفة المعاملات بإحدى الطرق السابقة ثم بالتعويض في المعادلة السابقة.

وهذا ما سوف نقوم بشرحه بالتفصيل في الفصل التالي:



استخدام المصفوفات في حل المشاكل الاقتصادية والإدارية والمالية

Matrices Uses in Solving Economics, Managements, and Finance Problem's

2

الفصل الثاني
استخدام المصفوفات في حل المشاكل الاقتصادية والإدارية والمالية
Matrices Uses in Solving Economics, Managements, and Finance Problem's

مقدمة:

تعتبر المصفوفات من الأساليب الرياضية التي تستخدم كثيراً في حل النماذج أو المشاكل الرياضية، وبصفة خاصة تلك التي تعتمد عليها الإدارة العليا في المنشأة في اتخاذ القرارات الإدارية بشأن تخطيط عناصر الإنتاج أو تحديد الوحدات الواجب إنتاجها في ضوء الإمكانيات أو الطاقات المتاحة للمنشأة، وكذلك تحديد المبالغ الواجب استثمارها في كل قناة استثمارية في ضوء الأموال المتاحة والعائد الاستثماري لكل قناة (وجه) استثماري، وفيما يلي بعض التطبيقات الاقتصادية والإدارية والمالية على استخدام المصفوفات في حل المعادلات الخطية.

أولاً: المصفوفات وإدارة الإنتاج.

ثانياً: المصفوفوات وتوازن السوق.

ثالثاً: المصفوفوات وتوازن الدخل القومي.

رابعاً: المصفوفات نموذج المدخلات والمخرجات.

أولاً: المصفوفات وإدارة الإنتاج:

مثال(1): مصنع آية لإنتاج الحلوى يقوم بإنتاج نوعين من الحلوى مستخدماً في ذلك الدقيق والسكر، فإذا كانت الكمية المتاحة للمصنع يومياً 13 طن دقيق، 25 طن سكر، والطلبية الواحدة من النوع الأول من الحلوى تحتاج في إنتاجها إلى طن واحد من دقيق، 5 طن من سكر، بينما الطلبية الواحدة من النوع الثاني من الحلوى تحتاج في إنتاجها إلى 2 طن من الدقيق، 2 طن من السكر.

المطلوب: تحديد عدد الطلبيات الممكن إنتاجها يومياً من النوعين بحيث يتم استخدام الكمية المتاحة للمصنع بالكامل.

خطوات الحل:

يتم وضع المعطيات السابقة في الجدول التالي:

النوع / الاحتياجات	النوع الأول (x)	النوع الثاني (y)	الطاقة المتاحة
الدقيق	1	2	13
السكر	5	2	25

معطيات الجدول السابق يمكن التعبير عنها في صورة المعادلات الآتية:

$$x + 2y = 13$$
$$5x + 2y = 25$$

- ثم حل المعادلات باستخدام المصفوفات بإحدى الطريقتين.

• باستخدام طريقة المحددات.

$$\begin{bmatrix} X \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}^{-1} \times \begin{bmatrix} 13 \\ 25 \end{bmatrix}$$

ثم إيجاد معكوس المصفوفة (مصفوفة المعاملات) باتباع الخطوات الآتية:

-إيجاد قيمة المحدد Δ.

$$\Delta = (1 \times 2) - (5 \times 2) = 2 - 10 = -8$$

-إيجاد المصفوفة المبدلة.

$$\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -5 & 1 \end{bmatrix}$$

-إيجاد معكوس المصفوفة.

$$\frac{1}{\Delta} \quad A^{-1} = [\text{المصفوفة المبدلة}]$$

$$= \frac{1}{-8} \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -5 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-2}{8} & \frac{2}{8} \\ \frac{5}{8} & \frac{-1}{8} \end{bmatrix}$$

-إيجاد قيم المتغيرات x , y.

$$\begin{bmatrix} X \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-2}{8} & \frac{2}{8} \\ \frac{5}{8} & \frac{-1}{8} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 13 \\ 25 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} X \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-26}{8} + \frac{50}{8} \\ \frac{65}{8} + \frac{-25}{8} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} X \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{24}{8} \\ \frac{40}{8} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} X \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$\therefore\ x = 3$$
$$\therefore\ y = 5$$

أي أن عدد الطلبيات الواجب إنتاجها من النوع الأول هو (3) وعدد الطلبيات الواجب إنتاجها من النوع الثاني هو (5).

حل آخر: باستخدام طريقة التخفيض المحوري:

$$x + 2y = 13$$
$$5x + 2y = 25$$

يتم حل المعادلات باستخدام طريقة التخفيض.

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 13 \\ 5 & 2 & 25 \end{array}\right]$$

- حيث أن العنصر a_{11} (العنصر الأول في العمود الأول في الصف الأول يساوي واحد صحيح ولذلك يترك كما هو ثم نقوم بتحويل باقي عناصر العمود الأول إلى أصفار وذلك كما يلي:

$$\overline{R_2} = R_2 - 5R_1$$

حيث يتم ضرب عناصر الصف الأول $5x$ ثم طرحه من الصف الثاني كما يلي:

$$\begin{array}{lcccc} R_2 & \rightarrow & 5 & 2 & 25 \\ 5R_1 & \rightarrow & 5 & 10 & 65 \\ \hline \overline{R}_2 = & & 0 & -8 & -40 \end{array}$$

يكون:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 13 \\ 0 & -8 & -40 \end{array}\right]$$

-يحول العنصر a_{22} (العنصر الثاني في العمود الثاني في الصف الثاني إلى واحد صحيح وذلك بقسمة عناصر الصف الثاني على -8 كما يلي:

$$\overline{R}_2 = \frac{R_2}{-8}$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 13 \\ 0 & 1 & 5 \end{array}\right]$$

- ثم بتحويل باقي عناصر العمود الثاني إلى أصفار وذلك بضرب عناصر الصف الثاني × 2 ثم طرحه من الصف الأول كما يلي:

$$\overline{R}_1 = R_1 - 2\ R_2$$

$$\begin{array}{lcccc} R_1 & \rightarrow & 1 & 2 & 13 \\ 2R_2 & \rightarrow & 0 & 2 & 10 \\ \hline \overline{R}_1 & & 1 & 0 & 3 \end{array}$$

وذلك كما يلي:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \end{array}\right]$$

وبذلك نجد أن:

X = 3

Y = 5

ولذلك فإنه لاستغلال الطاقة المتاحة يومياً للمصنع لا بد من إنتاج 3 طلبيات من النوع الأول، 5 طلبيات من النوع الثاني.

حل ثالث: باستخدام طريقة التخفيف المحوري في إيجاد معكوس المصفوفة:

$$\begin{aligned} x + 2y &= 13 \\ 5x + 2y &= 25 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} X \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}^{-1} \times \begin{bmatrix} 13 \\ 25 \end{bmatrix}$$

ثم نقوم بإيجاد معكوس مصفوفة المعاملات باستخدام طريقة التخفيض المحوري كما يلي:

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 5 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

- يجعل العنصر a_{11} يساوي واحد صحيح وباقي عناصر العمود الأول أصفار.

$$\overline{R}_2 = R_2 - 5\ R_1$$

$$\begin{array}{lcccc} R_2 \rightarrow & 5 & 2 & 0 & 1 \\ 2R_2 \rightarrow & 5 & 10 & 5 & 0 \\ \hline \overline{R}_2 & 0 & -8 & -5 & 1 \end{array}$$

يكون:

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -8 & -5 & 1 \end{array}\right]$$

- بجعل العنصر a_{22} واحد صحيح وباقي عناصر العمود الثاني أصفار وذلك كما يلي:

• بقسمة عناصر الصف الثاني على -8.

$$\overline{R_3} = \frac{R_3}{-8}$$

يكون:

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{5}{8} & \frac{-1}{8} \end{array}\right]$$

• بتحويل العنصر a_{12} إلى صفر وذلك كما يلي:

$$\overline{R}_1 = R_1 - 2\ R_2$$

$$\begin{array}{lcccc} R_2 \rightarrow & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2R_2 \rightarrow & 0 & 2 & \frac{10}{8} & \frac{-2}{8} \\ \hline \overline{R}_2 \rightarrow & 1 & 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{array}$$

يكون:

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{-1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & \frac{5}{8} & \frac{-1}{8} \end{array}\right]$$

أصبح لدينا معكوس مصفوفة المعاملات وهي:

$$\begin{bmatrix} \frac{-1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{5}{8} & \frac{-1}{8} \end{bmatrix}$$

يكون:

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}^{-1} \times \begin{bmatrix} 13 \\ 25 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{5}{8} & \frac{-1}{8} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 13 \\ 25 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-13}{4} & \frac{25}{4} \\ \frac{65}{8} & \frac{-25}{8} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{12}{4} \\ \frac{40}{8} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}$$

يكون: $Y = 5 , X = 3$

مثال(2): مصنع أحمد لإنتاج الأجهزة الكهربائية به ثلاثة أقسام للتشغيل، ويقوم بإنتاج ثلاثة أنواع من الأجهزة هي التليفزيون، الراديو، الفيديو، فإذا كان إنتاج جهاز التليفزيون الواحد يحتاج إلى 3 ساعات عمل في القسم الأول، وساعتان في القسم الثاني، 4 ساعات في القسم الثالث، كذلك يحتاج إنتاج جهاز الراديو الواحد إلى ساعتان عمل في القسم

الأول، وساعة عمل واحدة في القسم الثاني وساعتان عمل في القسم الثالث، بينما يحتاج إنتاج جهاز الفيديو الواحد إلى 5 ساعات عمل في القسم الأول، ساعة عمل في القسم الثاني، 4 ساعات عمل في القسم الثالث.

فإذا علمت أن الطاقة القصوى لقسم التشغيل الأول 17 ساعة أسبوعياً، 8 ساعات أسبوعياً لقسم التشغيل الثاني، 18 ساعة أسبوعياً لقسم التشغيل الثالث.

المطلوب: تحديد الكمية الواجب إنتاجها من الأجهزة الثلاثة بحيث يتم استغلال الطاقة المتاحة للمصنع بالكامل.

خطوات الحل: يمكن وضع المعطيات في الجدول التالي:

المنتجات / الأقسام	التلفزيون (x)	الراديو (y)	الفيديو (z)	الطاقة المتاحة
القسم الأول	3	2	5	17
القسم الثاني	2	1	1	8
القسم الثالث	4	2	4	18

يمكن وضع بيانات الجدول في صورة ثلاث معادلات ذات ثلاث مجاهيل (معادلة لكل قسم) وذلك كما يلي:

حيث أن:

$$3x + 2y + 5z = 17$$
$$2x + y + z = 8$$
$$4x + 2y + 4z = 18$$

x: تمثل عدد أجهزة التلفزيون الواجب إنتاجها.

y: تمثل عدد أجهزة الراديو الواجب إنتاجها.

z: تمثل عدد أجهزة الفيديو الواجب إنتاجها.

ثم وضع المعادلات في صورة مصفوفات كما يلي:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \text{[مقلوب مصفوفة المعاملات]} \times \text{[متجه الثوابت]}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 2 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 4 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 17 \\ 8 \\ 18 \end{bmatrix}$$

يتم إيجاد مقلوب مصفوفة المعاملات كما يلي:

1- إيجاد قيمة محدد المصفوفة $|\Delta|$.

$$|\Delta| = 3\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}$$

$$=3(4-2) -2\,(8-4) +5\,(4-4)$$

$$=(3\times 2) \quad -(2\times 4) \quad + \ (5\times 0)$$

$$= \quad 6 \quad - \quad 8 \quad + \quad 0 \quad = -2$$

2- إيجاد مصفوفة المرافقات مع ملاحظة قاعدة الإشارات.

$$\begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} \\ 4-2 & 8-4 & 4-4 \\ (2) & (4) & (0) \\ \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} \\ 8-10 & 12-20 & 6-8 \\ (-2) & (-8) & (-2) \\ \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \\ 2-5 & 3-10 & 3-4 \\ (-3) & (-7) & (-1) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 \\ -2 & -8 & -2 \\ -3 & -7 & -1 \end{bmatrix}$$

تطبيق قاعدة الإشارات:

$$\begin{bmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -4 & 0 \\ 2 & -8 & 2 \\ -3 & 7 & -1 \end{bmatrix}$$

- إيجاد المصفوفة المبدلة:

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & -3 \\ -4 & -8 & 7 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

يكون معكوس المصفوفة كما يلي:

$\frac{1}{\Delta}$ A^{-1} =[المصفوفة المبدلة]

$$= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & 2 & -3 \\ -4 & -8 & 7 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{-2}{2} & \frac{-2}{2} & \frac{3}{2} \\ \frac{4}{2} & \frac{8}{2} & \frac{-7}{2} \\ 0 & \frac{-2}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

بالتعويض:

$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} =$ [متجه الثوابت] × [معكوس مصفوفة المعاملات]

$$= \begin{bmatrix} \frac{-2}{2} & \frac{-2}{2} & \frac{3}{2} \\ \frac{4}{2} & \frac{8}{2} & \frac{-7}{2} \\ 0 & \frac{-2}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 17 \\ 8 \\ 18 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{-34}{2} + \frac{-16}{2} + \frac{54}{2} \\ \frac{68}{2} + \frac{64}{2} + \frac{-126}{2} \\ 0 + \frac{-16}{2} + \frac{18}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{2} \\ \frac{6}{2} \\ \frac{2}{2} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

يكون: $x = 2, \ y = 3, \ z = 1$

حل آخر: يمكن حل المعادلات السابقة باستخدام طريقة التخفيض المحوري:

$$\begin{aligned} 3x + 2y + 5z &= 17 \\ 2x + y + z &= 8 \\ 4x + 2y + 4z &= 18 \end{aligned}$$

يمكن وضع المعادلات على الصورة:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 5 & 17 \\ 2 & 1 & 1 & 8 \\ 4 & 2 & 4 & 18 \end{array}\right]$$

1- تحويل العنصر a_{11} إلى واحد صحيح وباقي عناصر العمود الأول إلى أصفار وذلك كما يلي:

- قسمة عناصر الصف الأول على 3.

$$\overline{R_1} = \frac{R_1}{-3}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{2}{3} & \frac{5}{3} & \frac{17}{3} \\ 2 & 1 & 1 & 8 \\ 4 & 2 & 4 & 18 \end{array}\right]$$

- بضرب عناصر الصف الأول × 2 ثم طرحه من عناصر الصف الثاني.
- بضرب عناصر الصف الأول × 4 ثم طرحه من عناصر الصف الثالث.

كما يلي:

$$\overline{R_2} = R_2 - 2R_1$$
$$\overline{R_3} = R_3 - 4R_1$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{2}{3} & \frac{5}{3} & \frac{17}{3} \\ 0 & \frac{-1}{3} & \frac{-7}{3} & \frac{10}{3} \\ 0 & \frac{-2}{3} & \frac{-8}{3} & \frac{-14}{3} \end{array}\right]$$

-تحويل العنصر a_{22} إلى واحد صحيح وذلك كما يلي:

$$\overline{R_2} = R_2 \times (-3)$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{2}{3} & \frac{5}{3} & \frac{17}{3} \\ 0 & 1 & 7 & -10 \\ 0 & \frac{-2}{3} & \frac{-8}{3} & \frac{-14}{3} \end{array}\right]$$

ثم تحويل الصفر a_{32} إلى صفر وذلك كما يلي:

$$\overline{R_3} = R_3 + \frac{2}{3}R_2$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{2}{3} & \frac{5}{3} & \frac{17}{3} \\ 0 & 1 & 7 & 10 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right]$$

يمكن صياغة المعادلات كما يلي:

$$X + \frac{2}{3}Y + \frac{5}{3}Z = \frac{17}{3} \quad \rightarrow (1)$$

$$Y + 7Z = 10 \quad \rightarrow (2)$$

$$2Z = 2 \quad \rightarrow (3)$$

من المعادلة الثالثة نجد أن:

$$2Z = 2$$

$$Z = 1$$

بالتعويض في المعادلة الثانية:

$$y + 7 = 10$$

$$y = 3$$

بالتعويض في المعادلة الأولى:

$$x + \frac{2}{3}(3) + \frac{5}{3}(1) = \frac{17}{3}$$

$$x + 2 + \frac{5}{3} = \frac{17}{3}$$

$$x + 2\frac{5}{3} = \frac{17}{3}$$

$$x = \frac{17}{3} - \frac{11}{3}$$

$$x = \frac{6}{3} = 2$$

يكون لدينا:

$$x = 2$$
$$y = 3$$
$$z = 1$$

ثانياً: المصفوفات وتوازن السوق:

مثال(1): إذا كان دالتى الطلب والعرض لسلعة ما على الصورة التالية:

$$Qd + 2p = 25$$
$$Qs - 3p = 5$$

حيث أن Q_d , Q_s تمثل الكميات المطلوبة والكميات المعروضة p تمثل السعر.

المطلوب: تحديد السعر التوازني والكمية التوازنية في السوق.

خطوات الحل:

عند التوازن فإن:

$$Q_d = Q_s = Q$$

يكون:

$$Q + 2p = 25$$
$$Q - 3p = 5$$

- فإنه يمكن حل هذه المعادلات باستخدام المصفوفات:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 25 \\ 2 & -3 & 5 \end{array}\right]$$

-بجعل العنصر a_{11} يساوي واحد صحيح وباقي عناصر العمود الأول تساوي صفر وذلك كما يلي:

$$\overline{R}_2 = R_2 - R_1$$

$$\begin{array}{llll} R_2 & \to 1 & -3 & 5 \\ R_1 & \to 1 & 2 & 25 \\ \hline R_2 & \to 0 & -5 & -20 \end{array}$$

كما يلي:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 25 \\ 0 & -5 & -20 \end{array}\right]$$

- تحويل العنصر a_{22} إلى واحد صحيح وباقي عناصر العمود الثاني إلى صفر وذلك كما يلي:

• بقسمة عناصر الصف الثاني على -5

$$\overline{R_2} = \frac{R_2}{5}$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 25 \\ 0 & 1 & 4 \end{array}\right]$$

• بتحويل الصفر a_{12} إلى صفر وذلك كما يلي:

$$\overline{R_2} = R_1 - 2R_2$$

$$\begin{array}{llll} R_2 \rightarrow & 1 & 3 & 25 \\ 2R_2 \rightarrow & 0 & 2 & 8 \\ \hline \overline{R}_1 & 1 & 0 & 17 \end{array}$$

يكون لدينا:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 17 \\ 0 & 1 & 4 \end{array}\right]$$

أي أن: $p = 4 \ , \ Q = 17$

أي أن الكمية التوازنية هي 17 والسعر التوازني هو 4.

حل آخر: باستخدام معكوس المصفوفة.

$$Q_d + 2p = 25$$

$$Q_s - 3p = 5$$

وعند التوازن: $Q_d = Q_s = Q$

يكون:

$$Q + 2p = 25$$
$$Q - 3p = 5$$

$$\begin{bmatrix} Q \\ p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}^{-1} \times \begin{bmatrix} 25 \\ 5 \end{bmatrix}$$

ثم إيجاد معكوس مصفوفة المعاملات كما يلي:

- إيجاد قيمة محدد المصفوفة $|\Delta|$.

$$\Delta = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$$
$$= -3 - 2 = -5$$

- إيجاد المصفوفة المبدلة: وذلك بتبديل عناصر القطر الرئيسي وتغيير إشارات القطر الفرعي.

$$\begin{bmatrix} -3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

-معكوس المصفوفة: $\frac{1}{\Delta}$ A^{-1} =[المصفوفة المبدلة]

$$= \frac{1}{-5} \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{-1}{5} \end{bmatrix}$$

$\begin{bmatrix} Q \\ P \end{bmatrix} =$ [معكوس مصفوفة المعاملات] × [متجه الثوابت]

$$= \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{-1}{5} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 25 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{75}{5} & + & \frac{10}{5} \\ \frac{25}{5} & + & \frac{-5}{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{85}{5} \\ \frac{20}{5} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} Q \\ p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17 \\ 4 \end{bmatrix}$$

تكون 4 = p , 17 = Q

حل ثالث: باستخدام معكوس المصفوفة بطريقة التخفيض المحوري:

$$Q + 2p = 25$$
$$Q - 3p = 5$$

$$\begin{bmatrix} Q \\ p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}^{-1} \times \begin{bmatrix} 25 \\ 5 \end{bmatrix}$$

يتم إيجاد معكوس مصفوفة المعاملات باستخدام طريقة التخفيض المحوري كما يلي:

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

-تحويل الصفر a_{12} إلى صفر كما يلي:

$$\overline{R_2} = R_2 - R_1$$

$$\begin{array}{lcccc} R_2 \rightarrow & 1 & -3 & 0 & 1 \\ R_1 \rightarrow & 1 & 2 & 1 & 0 \\ \hline \overline{R_2} \rightarrow & 0 & -5 & -1 & 1 \end{array}$$

يكون لدينا:

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

-تحويل العنصر a_{22} إلى واحد صحيح كما يلي:

$$\overline{R}_2 = \frac{R_2}{-5}$$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{5} & \frac{-1}{5} \end{array}\right]$$

-تحويل العنصر a_{12} إلى صفر وذلك كما يلي:

$$\overline{R}_1 = R_1 - 2R_2$$

$$\begin{array}{lcccc} R_1 \rightarrow & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2R_2 \rightarrow & 0 & 2 & \frac{2}{5} & \frac{-2}{5} \\ \hline & 1 & 0 & \frac{3}{5} & \frac{2}{5} \end{array}$$

يكون لدينا:

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{3}{5} & \frac{2}{5} \\ 0 & 1 & \frac{1}{5} & \frac{-1}{5} \end{array}\right]$$

فيكون معكوس المصفوفة هو:

$$\begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{-1}{5} \end{bmatrix}$$

$\begin{bmatrix} Q \\ p \end{bmatrix}$ = [معكوس مصفوفة المعاملات] × [متجه الثوابت]

$$= \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{-1}{5} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 25 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{75}{5} + \frac{10}{5} \\ \frac{25}{5} + \frac{-5}{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{85}{5} \\ \frac{20}{5} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} Q \\ p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17 \\ 4 \end{bmatrix}$$

مثال(2): إذا كان دالتى العرض والطلب لسلعة ما على الصورة التالية:

$3Q_d + 5p = 200$

$7Q_s - 3p = 56$

المطلوب: ما هو السعر الذي يحقق التوازن في السوق وكذلك الكمية التوازنية.

خطوات الحل:

عند التوازن:

$Q_d = Q_s = Q$

$3Q_d + 5p = 200$

$7Q_s - 3p = 56$

حل المعادلات باستخدام المصفوفات:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 3 & 5 & 200 \\ 7 & -3 & 56 \end{array}\right]$$

-تحويل العنصر a_{11} إلى واحد صحيح كما يلي:

$$\overline{R_1} = \frac{R_1}{3}$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1,67 & 66,67 \\ 7 & -3 & 65 \end{array}\right]$$

-تحويل العنصر a_{21} إلى صفر كما يلي:

$$\overline{R_2} = R_2 - 7R_1$$

$$\begin{array}{llll} R_2 \rightarrow & 7 & -3 & 65 \\ 7R_1 \rightarrow & 7 & 11{,}69 & 466{,}69 \\ \hline \overline{R}_2 \rightarrow & 0 & -14{,}69 & -410{,}69 \end{array}$$

يكون لدينا:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1{,}67 & 66{,}67 \\ 0 & -14{,}69 & -410{,}69 \end{array}\right]$$

-تحويل العنصر a_{22} إلى واحد صحيح وذلك بالقسمة على 6914,-.

$$\overline{R_2} = \frac{R_2}{-14.69}$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1{,}67 & 66{,}67 \\ 0 & 1 & 35{,}13 \end{array}\right]$$

-تحويل العنصر a_{21} إلى صفر وذلك كما يلي:

$$\overline{R_1} = R_1 - 1{,}67R_2$$

$$\begin{array}{llll} \overline{R}_2 \rightarrow & 1 & 1{,}67 & 66{,}67 \\ 1.67R_2 \rightarrow & 0 & 1{,}67 & 58{,}67 \\ \hline \overline{R}_1 & 1 & 0 & 8 \end{array}$$

يكون لدينا:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 35{,}13 \end{array}\right]$$

وبذلك فإن:

$Q = 8$

$p = 35{,}13$

ثالثاً: المصفوفات وتوازن الدخل القومي:

مثال(1): في ضوء المعلومات التالية حدد الدخل التوازني (y) ومعدل الفائدة التوازني (R) .

دالة الاستهلاك $C = ,8y + 25$

دالة الاستثمار $I = -20r + 325$

عرض النقود $Ms = 500$

الطلب على النقود $Md = ,2y - 30r + 650$

خطوات الحل:

توازن سوق السلع والخدمات:

$$y = C + I$$
$$y = ,8y + 25 - 20r + 325$$
$$y = ,8y - 20r + 350$$
$$y - ,8y = -20r = 350$$
$$,2y + 20r = 350 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

توازن سوق النقد:

$$M_d = M_s$$
$$,2y - 30r + 650 = 500$$
$$,2y - 30r = -150 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

يكون لدينا معادلتين هي:

$$,2y + 20r = 350$$
$$,2y - 30r = -150$$

بحل المعادلتين باستخدام المصفوفات كما يلي:

$\begin{bmatrix} y \\ r \end{bmatrix}$ = [مقلوب مصفوفة المعاملات]$^{-1}$ × [متجه الثوابت]

$$= \begin{bmatrix} ,2 & 20 \\ ,2 & -30 \end{bmatrix}^{-1} \times \begin{bmatrix} 350 \\ -150 \end{bmatrix}$$

يتم إيجاد معكوس مصفوفة المعاملات باستخدام المحددات.

- إيجاد قيمة محدد المصفوفة (Δ).

$(\Delta) = (,2 \times -30) - ,2(20)$
$= -6 - 4 = -10$

- إيجاد المصفوفة المبدلة:

$$\begin{bmatrix} -30 & -20 \\ -,2 & ,2 \end{bmatrix}$$

- يتم إيجاد معكوس المصفوفة كما يلي:

$\frac{1}{\Delta}$ A^{-1} =[المصفوفة المبدلة]

$$A^{-1} = \frac{1}{-10}\begin{bmatrix} -30 & -20 \\ -,2 & ,2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ ,02 & -,02 \end{bmatrix}$$

يكون:

$$\begin{bmatrix} y \\ r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ ,02 & -,02 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 350 \\ -150 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} y \\ r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1050 - 300 \\ 7 + 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} y \\ r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 750 \\ 10 \end{bmatrix}$$

يكون الدخل التوازني Y=750، ويكون معدل الفائدة التوازني $r = 10\%$.

حل آخر: يتم حل المعادلتين باستخدام المصفوفات باستخدام التخفيض المحوري:

$$,2y + 20r = 350$$
$$,2y - 30r = -150$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} ,2 & 20 & 350 \\ ,2 & -30 & -150 \end{array}\right]$$

تحويل العنصر a_{11} إلى واحد صحيح وذلك بقسمة عناصر الصف على (,2) كما يلي:

$$\overline{R_1} = \frac{R_1}{,2}$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} ,1 & 100 & 1750 \\ ,2 & -30 & -150 \end{array}\right]$$

تحويل العنصر (a_{21}) إلى صفر كما يلي:

$$\overline{R}2 = R_2 - ,2R_1$$

$$\begin{array}{rrrr} R_1 \rightarrow & ,2 & -30 & -150 \\ ,2R_1 \rightarrow & -,2 & -20 & -350 \\ \hline & 0 & -50 & -500 \end{array}$$

يكون لدينا المصفوفة:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 100 & 1750 \\ 0 & -50 & -500 \end{array}\right]$$

تحويل العنصر (a_{22}) إلى واحد صحيح وذلك بقسمة عناصر الصف الثاني على (-50).

$$\overline{R_2} = \frac{R_2}{-50}$$

يكون لدينا:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 100 & 1750 \\ 0 & 1 & 10 \end{array}\right]$$

بتحويل العنصر (a_{12}) إلى صفر وذلك كما يلي:

$$\overline{R}_1 = R_1 - 100R_2$$

$$\begin{array}{rrrr} R_1 \rightarrow & 1 & 100 & 1750 \\ 100R_2 \rightarrow & 0 & 100 & 1000 \\ \hline & 1 & 0 & 750 \end{array}$$

يكون لدينا المصفوفة:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 750 \\ 0 & 1 & 10 \end{array}\right]$$

وبذلك فإن: $r = 10 , \quad y = 750$

مثـال (2): فـي ضـوء المعلومـات التاليـة حدد الـدخل التـوازنـي (y) ومعـدل الفائدة التوازني:

دالة الاستهلاك $C = ,7y + 90$

دالة الاستثمار $I = -30r + 360$

عرض النقود $Ms = 650$

الطلب على النقود $M_d = ,3y - 20r + 600$

خطوات الحل:

- توازن سوق السلع والخدمات:

$$y = C + I$$
$$y = ,7y + 90 - 30r + 360$$
$$y - ,7y = -30r + 450$$
$$,3y + 30r = 450 \text{................}(1)$$

- توازن سوق النقد:

$$M_d = M_s$$
$$,3y - 20r + 600 = 650$$
$$,3y - 20r = 50 \text{................}(2)$$

بحل المعادلتين باستخدام المصفوفات كما يلي:

$$,3y + 30r = 450$$
$$,3y - 20r = 50$$

$$\begin{bmatrix} y \\ r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ,3 & 30 \\ ,3 & -20 \end{bmatrix}^{-1} \times \begin{bmatrix} 450 \\ 50 \end{bmatrix}$$

يتم إيجاد معكوس مصفوفة المعاملات كما يلي:

- محدد مصفوفة المعاملات Δ.

$$(\Delta) = -6 - 9 = -15$$

- المصفوفة المبدلة:

$$\begin{bmatrix} -20 & -30 \\ -{,}3 & {,}3 \end{bmatrix}$$

- معكوس المصفوفة يحسب كما يلي:

$$\frac{1}{\Delta} \quad A^{-1} = [\text{المصفوفة المبدلة}]$$

$$= \frac{1}{-15}\begin{bmatrix} -20 & -30 \\ -{,}3 & {,}3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{20}{15} & \frac{30}{15} \\ \frac{{,}3}{15} & \frac{-{,}3}{15} \end{bmatrix}$$

وبذلك فإن:

$$\begin{bmatrix} y \\ r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{20}{15} & \frac{30}{15} \\ \frac{{,}3}{15} & \frac{-{,}3}{15} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 450 \\ 50 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} y \\ r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 900 & + & 100 \\ 9 & + & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} y \\ r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1000 \\ 10 \end{bmatrix}$$

يكون $10 = r \; , \; 1000 = y$

رابعاً: المصفوفات ونموذج المدخلات والمخرجات:

Matrices and Input-Output Model

مثال(1): بفرض أن هناك قطاعين للإنتاج هما (1)، (2) في إحدى الدول وكان جدول المدخلات والمخرجات كما يلي:

المدخلات / المخرجات	1	2	طلب نهائي	إجمالي النتائج

1	4	10	36	50
2	10	5	95	100

المطلوب:

1- إيجاد مصفوفة المعاملات الفنية.

2- إيجاد مصفوفة ليونتيف.

3- إيجاد أثر زيادة الطلب على الاستهلاك النهائي للقطاع (1) بمقدار وحدتين.

خطوات الحل:

1-مصفوفة المعاملات الفنية هي:

$$= \begin{bmatrix} \frac{4}{50} & \frac{10}{100} \\ \frac{10}{50} & \frac{5}{100} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} ,08 & ,1 \\ ,2 & ,05 \end{bmatrix}$$

2- مصفوفة ليونتيف كما يلي:

مصفوفة ليونتيف = مصفوفة الوحدة [I] – مصفوفة المعاملات الفنية.

$$[L] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ,08 & ,1 \\ ,2 & ,05 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} ,92 & -,1 \\ -,2 & ,95 \end{bmatrix}$$

3- لبيان أثر زيادة الطلب على الاستهلاك النهائي للقطاع (1) بمقدار وحدتين نتبع ما يلي:

-إيجاد معكوس (مقلوب) مصفوفة ليونتيف.

$$\begin{bmatrix} ,92 & -,1 \\ -,2 & ,95 \end{bmatrix}^{-1}$$

كما يلي:

1- إيجاد قيمة محدد المصفوفة $|\Delta|$.

$$|\Delta| = (,92 \times ,95) - (-,2 \times -,1)$$
$$= \ ,879 \ - \ ,02 = ,859$$

2- إيجاد المصفوفة المبدلة وذلك بتبديل عناصر القطر الرئيسي وتغيير إشارات عناصر القطر الفرعي كما يلي:

$$\begin{bmatrix} ,95 & ,1 \\ ,2 & ,92 \end{bmatrix}$$

3- مقلوب المصفوفة:

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta} \times [\text{المصفوفة المبدلة}]$$

$$= \frac{1}{,859} \begin{bmatrix} ,95 & ,1 \\ ,2 & ,92 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{,95}{,859} & \frac{,1}{,859} \\ \frac{,2}{,859} & \frac{,92}{,859} \end{bmatrix}$$

-الإنتاج الكلي عند زيادة الطلب النهائي للقطاع (1) بمقدار وحدتين يصبح:

الطلب النهائي الجديد:	القطاع (1)	القطاع (2)
	36 + 2 = (38)	95 + 2 = (97)

∴ قيمة الطلب النهائي الجديد: $\begin{bmatrix} 38 \\ 97 \end{bmatrix}$

الإنتاج الكلي = مقلوب مصفوفة ليونتيف × قيمة متجه الطلب النهائي الجديد

$$= \begin{bmatrix} \frac{,95}{,859} & \frac{,1}{,859} \\ \frac{,2}{,859} & \frac{,92}{,859} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 38 \\ 97 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{36.1}{,859} + \frac{9,7}{,859} \\ \frac{7,6}{,859} + \frac{89,24}{,859} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{45,8}{,859} \\ \frac{96,84}{,859} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 53,3 \\ 112,7 \end{bmatrix}$$

يكون أثر زيادة الطلب على الإنتاج الكلي:

$$= \begin{bmatrix} 53,3 \\ 112,7 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 50 \\ 100 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3,3 \\ 12,7 \end{bmatrix}$$

مثال(2): شركة أحمد للأمن الغذائي لديها ثلاثة أقسام إنتاجية فإذا علمت أن توزيع منتجات الأقسام الثلاثة على النحو التالي:

إجمالي الإنتاج الكلي	المبيعات والمخزون السلعي والطلب النهائي	الأقسام الإنتاجية			المدخلات / المخرجات
		(3)	(2)	(1)	
200	120	50	30	0	القسم الأول
250	140	75	0	35	القسم الثاني
300	250	0	40	10	القسم الثالث
		50	60	30	مواد مباشرة
		40	50	50	أجور مباشرة
		30	30	40	مصروفات غير مباشرة
		55	40	35	أرباح رأس المال
			250	200	

فإذا قامت الشركة بتقدير مبيعاتها للفترة القادمة ومستوى المخزون السلعي المطلوب وكانت بياناتها كالآتي:

الطلب النهائي المتوقع	المخزون السلعي	المبيعات المتوقعة	المنتج
250	70	180	الأول
300	100	200	الثاني
350	100	250	الثالث

المطلوب: تقدير مستويات الإنتاج الكلي لكل قسم إنتاجي وكذلك تقدير قيمة التكاليف والأرباح المرتبطة بمستويات الإنتاج.

خطوات الحل:

1- إيجاد مصفوفة المعاملات الفنية:

$$\begin{bmatrix} \frac{0}{200} & \frac{30}{250} & \frac{50}{300} \\ \frac{35}{200} & \frac{0}{250} & \frac{75}{300} \\ \frac{10}{200} & \frac{40}{250} & \frac{0}{300} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & ,12 & ,17 \\ ,18 & 0 & ,25 \\ ,05 & ,16 & 0 \end{bmatrix}$$

2- إيجاد مصفوفة ليونتيف = مصفوفة الوحدة [I] – مصفوفة المعاملات الفنية

$$[L] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & ,12 & ,17 \\ ,18 & 0 & ,25 \\ ,05 & ,16 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -,12 & -,17 \\ -,18 & 1 & -,25 \\ -,05 & -,16 & 1 \end{bmatrix}$$

3- إيجاد مقلوب مصفوفة ليونتيف:

يتم ذلك باتباع الخطوات التالية:

- إيجاد قيمة محدد المصفوفة.
- إيجاد مصفوفة المرافقات مع ملاحظة قاعدة الإشارات.
- إيجاد المصفوفة المبدلة.
- مقلوب المصفوفة $\frac{1}{\Delta} \times$ [المصفوفة المبدلة]

نحصل على مقلوب (معكوس) مصفوفة ليونتيف كما يلي:

$$\begin{bmatrix} \frac{,96}{,923} & \frac{,15}{,923} & \frac{,20}{,923} \\ \frac{,19}{,923} & \frac{,99}{,923} & \frac{,28}{,923} \\ \frac{,08}{,923} & \frac{,17}{,923} & \frac{,98}{,923} \end{bmatrix}$$

4- تقدير مستويات الإنتاج عن طريق ضرب معكوس مصفوفة ليونتيف × قيمة الطلب النهائي كما يلي:

[الطلب النهائي المتوقع] × [معكوس مصفوفة ليونتيف] = [مستويات الإنتاج]

$$= \begin{bmatrix} \frac{,96}{,923} & \frac{,15}{,923} & \frac{,20}{,923} \\ \frac{,19}{,923} & \frac{,99}{,923} & \frac{.28}{,923} \\ \frac{,08}{,923} & \frac{,17}{,923} & \frac{,98}{,923} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 250 \\ 300 \\ 350 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{240 + 45 + 70}{,923} \\ \frac{47,5 + 297 + 98}{,923} \\ \frac{20 + 51 + 343}{,923} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{355}{,923} \\ \frac{442,5}{,923} \\ \frac{414}{,923} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 384,6 \\ 479,5 \\ 448,5 \end{bmatrix}$$

وبذلك تكون مستويات الإنتاج والأقسام هي:

القسم الأول = 384.4
القسم الثاني = 479.4
لقسم الثالث = 448.5

5- تقدير التكاليف والأرباح المرتبطة بمستويات الإنتاج المتوقعة كما يلي:

- حساب مصفوفة المعاملات الفنية للقيمة المضاف كما يلي:

$$\begin{bmatrix} \frac{30}{200} & \frac{60}{250} & \frac{50}{300} \\ \frac{50}{200} & \frac{50}{250} & \frac{40}{300} \\ \frac{40}{200} & \frac{30}{250} & \frac{30}{300} \\ \frac{35}{200} & \frac{40}{250} & \frac{55}{300} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} ,15 & ,24 & ,37 \\ ,25 & ,20 & ,13 \\ ,20 & ,12 & ,10 \\ ,18 & ,16 & ,18 \end{bmatrix}$$

• حساب التكاليف والأرباح المرتبطة بمستويات الإنتاج وذلك بضرب مصفوفة المعاملات الفنية لعناصر القيمة المضافة × قيمة الإنتاج المتوقع كما يلي:

$$\begin{bmatrix} 384,6 \\ 479,4 \\ 448,5 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ,15 & ,24 & ,37 \\ ,25 & ,20 & ,13 \\ ,20 & ,12 & ,10 \\ ,18 & ,16 & ,18 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \text{تكلفة المواد} \\ \text{تكلفة الأجور} \\ \text{مصروفات غير مباشرة} \\ \text{أرباح رأس المال} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 57,5 + 115,1 + 76,2 \\ 96,1 + 95,9 + 58,3 \\ 76,9 + 57,5 + 44,7 \\ 69,3 + 76,7 + 80,7 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 241 \\ 150,3 \\ 179,2 \\ 226,6 \end{bmatrix}$$

وبذلك تكون التكاليف والأرباح المرتبطة بمستويات الإنتاج كما يلي:

تكلفة المواد = 241
تكلفة الأجور = 150.3
المصروفات غير المباشرة = 179.2
أرباح رأس المال = 226.6

الباب الرابع

4

أسلوب البرمجة الخطية

Linear Programing Technique

- **الفصل الأول: طبيعة البرمجة الخطية.**
- **الفصل الثاني: استخدام الطريقة البيانية في حل نماذج البرمجة الخطية.**
- **الفصل الثالث: استخدام طريقة السمبلكس في حل نماذج البرمجة الخطية.**
- **الفصل الرابع: المشكلة المقابلة (الثنائية).**

الباب الرابع
أسلوب البرمجة الخطية
Linear Programing Technique

المقدمة:

البرمجة الخطية هي عبارة عن أسلوب رياضي يمكن استخدامه في تحديد النهايات العظمى أو الصغرى لدالة خطية مقيدة بعدد من القيود الخطية التي تتخذ شكل متباينات أو معادلات (متساويات) أو خليط بينهما وبشرط أن تكون قيم المتغيرات عند النهاية العظمى، أو الصغرى غير سالبة.

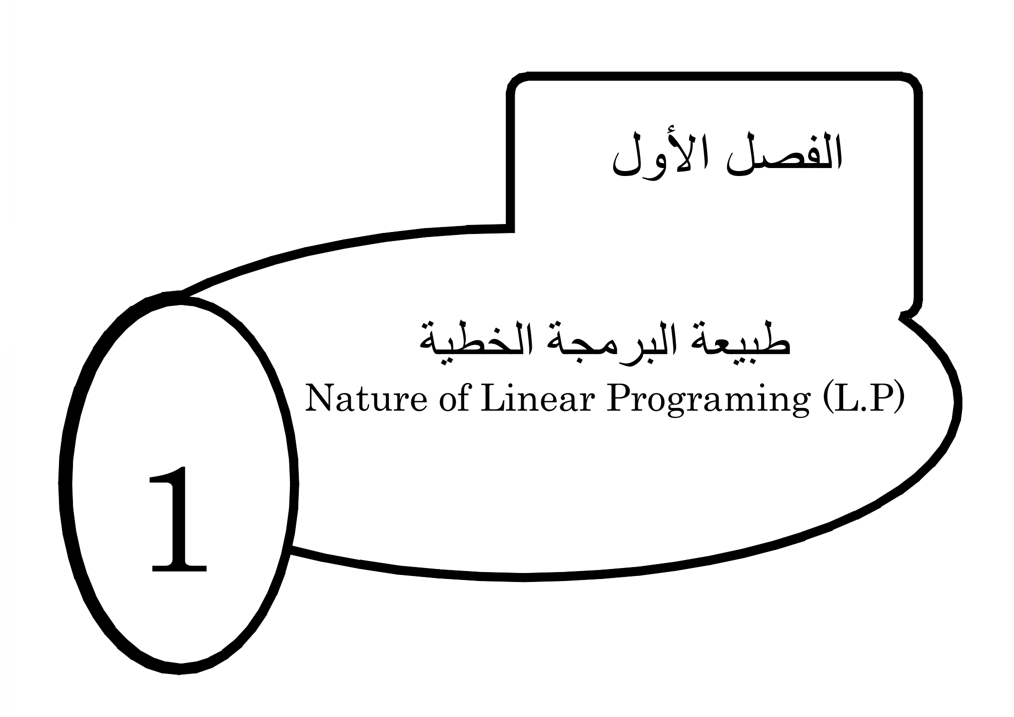
ولم يكن الاهتمام بأسلوب البرمجة الخطية جديداً، ففي عام 1939 توصل العالم الروسي Kantorovich إلى أن هناك مجموعة من العوامل التي تعوق العملية الإنتاجية، وقد أمكن صياغة هذه العوامل في نموذج رياضي واحد يسهل من استخدام الطرق الرياضية والرقمية في إيجاد الحلول لها، إلا أن جهوده هذه لم يعترف بها في وقتها، إلى أن قام Stigler في عام 1945 بتحديد مكونات الوجبات الغذائية التي تستخدم في عمل الرجيم Diet بأقل تكلفة ممكنة وذلك باستخدام وتطبيق أسلوب البرمجة الخطية، وعلى الرغم من أن الطرق والأساليب المستخدمة في البرمجة الخطية حديثة العهد، إلا أن هذه الطرق والأساليب قد تم تطويرها من قبل Dantzig في عام 1947 تقريباً، وهو عالم رياضي في سلاح الجو الأمريكي عندما قام بتطوير -هو وزملائه في سلاح الجو- طريقة للحل وهي تعرف وتستخدم الآن على نطاق واسع وهي طريقة السمبلكس Simplex Method وقد ازداد بعد ذلك الاهتمام بتطوير وتطبيق أسلوب البرمجة الخطية، وتوجد العديد من برامج بحوث العمليات (البرامج الجاهزة) التي تستخدم في حل المشاكل الخاصة بأسلوب البرمجة الخطية باستخدام الحاسب الآلي.

ونتناول في هذا الباب:

الفصل الأول: طبيعة البرمجة الخطية.

الفصل الثاني: استخدام الطريقة البيانية في حل نماذج البرمجة الخطية.

الفصل الثالث: استخدام طريقة السمبلكس في حل نماذج البرمجة الخطية.


الفصل الأول
طبيعة البرمجة الخطية
Nature of Linear Programing (L.P)
1

الفصل الأول
طبيعة البرمجة الخطية
Nature of Linear Programing (L.P)

1- مفهوم البرمجة الخطية (L.P):

تعرف البرمجة الخطية بأنها أسلوب رياضي كمي يستخدم في اتخاذ القرارات الاقتصادية المثلى، ويعرف الاقتصاديون أسلوب البرمجة الخطية بأنه طريقة رياضية منظمة لتخصيص مجموعة من الموارد الاقتصادية المحدودة على عدد من الاحتياجات المتنافسة على هذه الموارد بأفضل طريقة ممكنة، أي أن أسلوب البرمجة الخطية يعتبر أسلوب رياضي كمي يهدف إلى الوصول إلى أفضل استغلال وتخصيص ممكن للموارد الاقتصادية المتاحة في ظل مجموعة معينة من القيود والحدود الثابتة.

ويطلق على هذا الأسلوب (البرمجة) حيث أنه يتكون من مجموعة من البرامج والحلول الممكنة ويعمل على اختيار الأفضل منها، كما يصف (بالخطية) حيث يفترض وجود علاقات خطية بين المدخلات المتمثلة في الموارد الاقتصادية وبين المخرجات المتمثلة في المنتجات، حيث تتغير المخرجات تبعاً لتغير المدخلات بنفس النسبة وفي نفس الاتجاه.

2- استخدامات أسلوب البرمجة الخطية:

يستخدم أسلوب البرمجة الخطية في حل عدد كبير ومتنوع من المشاكل في كافة الوحدات الحكومية، العسكرية، الصناعية، التجارية، كما يستخدم في اتخاذ الكثير من القرارات الإدارية في مجالات عديدة مثل الإنتاج، التسويق، الاستثمار، التمويل، ومن أهم استخدامات أسلوب البرمجة الخطية ما يلي:

1- تحديد التشكيلة المثلى للإنتاج في ضوء الموارد المحدودة، كذلك تحديد كميات الإنتاج أو مستوياته، وذلك من كل نوع من أنواع المنتجات.

2- تحديد التشكيلة المثلى للاستثمارات في الأوراق المالية المختلفة.

3- تحديد المزيج الأمثل الخاص بمشاكل الخلط الذي يحقق أدنى تكلفة ممكنة وكذلك الذي يحقق أقصى ربح ممكن.

4- تحديد أفضل طرق نقل وتوزيع المنتجات من مواقع الإنتاج المختلفة إلى مواقع البيع أو التخزين في المناطق الجغرافية المختلفة، بحيث يمكن تلبية الاحتياجات بأقل تكلفة ممكنة.

5- تحديد أفضل طرق تعيين أو تخصيص الأعمال المختلفة على الآلات والمعدات والعاملين عليها، بحيث يتحقق أفضل تشغيل ممكن.

3- مفاهيم البرمجة الخطية:

يستخدم أسلوب البرمجة الخطية مجموعة من المفاهيم والمصطلحات يجب تفسيرها وتحديد مضمونها بشكل واضح حتى يستطيع الطالب والقارئ والباحث التعرف عليها وهي:

3-1- البرنامج:

وهو عبارة عن خطة عمل يتم تنفيذها خلال فترة زمنية معينة، ومن أهم البرامج تشكيلة الإنتاج، تشكيلة الاستثمارات، مزيج الخلط، نقل المنتجات، تخصيص الأعمال.

3-2- البرنامج الأمثل:

هو برنامج يمكنه تحقيق أفضل حل ممكن للمشكلة، ويتمثل في تعظيم الأرباح أو التخفيض لأدنى حد ممكن للتكاليف.

3-3- المتغير:

وهو عبارة عن المنتج أو الخدمة أو المشروع الذي يتنافس مع غيره في الحصول على موارد محددة متاحة للمنشأة.

3- 4- البرمجة:

وهي عبارة عن مجموعة من الإجراءات المنظمة التي يمكن عن طريقها تحديد أو تصميم برنامج معين ، وتتكون البرمجة من سلسلة متتابعة من القواعد الحسابية لحل مشكلة يمكن تنفيذها يدوياً أو باستخدام الحاسب الآلي.

3-5- الخطية:

يقصد بها ضرورة وجود علاقة أو تناسب طردي بين أحد المتغيرات التابعة ومتغير أو أكثر من المتغيرات المستقلة.

3-6- البرمجة الخطية:

هي عبارة عن أسلوب أو طريقة رياضية لتحديد برنامج أمثل لمجموعة متغيرات متداخلة في ضوء مجموعة موارد محدودة متاحة للمنشأة خلال فترة زمنية معينة.

4- عناصر أسلوب البرمجة الخطية:

يعتبر أسلوب البرمجة الخطية من الأساليب الأكثر استخداماً وانتشاراً في التطبيق، كما أنها تعتبر من طرق الأمثلية التي لا يتم إجراء تحسينات لاحقة عليها، وبالتالي فهي من أفضل الأساليب التجريبية لأنها تعطي الحلول المثلى، وتتمثل عناصر البرمجة الخطية فيما يلي:

1- **دالة الهدف:** وهي تعبر عن العلاقة بين متغيرات القرار (في مشاكل المزيج الإنتاجي) فإن متغيرات القرار تتمثل في منتجات الشركة المحددة في المشكلة، الهدف الذي تسعى الوصول إليه (إماأدنى تكلفة أو أقصى ربح).

2- **متغيرات القرار:** تمثل الخيارات المتاحة أمام صانع القرار عند استخدام الموارد وحل المشكلة.

3-**القيود:** وهي محددات تُقيد الخيارات المتاحة لصانع القرار ويمكن التعبير عن القيود في ثلاثة أشكال:

أ-علاقة أكبر أو يساوي (≥) ويمكن التعبير عنها كما يلي:

$$3x + 2y \geq 12$$

ب-علاقة أقل من أو يساوي (≤) ويمكن التعبير عنها كما يلي:

$$5x + 16y \leq 80$$

ج-علاقة التساوي: حيث يكون المطلوب الالتزام برقم محدد من المواد بدون أكثر أو أقل.

$$x + 2y = 10$$

ويعتبر هذا القيد هو الأصعب أو الأكثر حرجاً لأنه يتطلب الالتزام برقم محدد.

5- شروط استخدام البرمجة الخطية:

يتطلب استخدام أسلوب البرمجة الخطية ضرورة توافر عدة شروط نوردها على النحو التالي:

1- يجب أن يكون هناك هدف يراد تحقيقه، وعادة يكون هذا الهدف هو تعظيم الأرباح إلى أقصى ما يمكن أو تخفيض التكاليف إلى أدنى ما يمكن وذلك حتى يمكن صياغة المشكلة في صورة نموذج رياضي وفقاً لأسلوب البرمجة الخطية.

2- يجب أن تكون عناصر المشكلة ومتغيراتها قابلة للقياس الكمي، بمعنى أنه يمكن قياسها كمياً، وعلى ذلك فإن العناصر والمتغيرات التي لا يمكن التعبير عنها في صورة كمية لا يمكن إدراجها في النموذج الرياضي للبرمجة الخطية.

3- يجب أن تكون متغيرات المشكلة قابلة للتجزئة، بمعنى أنه يمكن للمتغيرات أن تأخذ قيماً أو كميات كسرية، أي جزء من وحدة القياس، أي يسمح بإنتاج كسور من المنتج النهائي في برنامج الإنتاج الأمثل.

4-يجب أن تكون الإدارة في حالة تأكد تام فيما يتعلق بالعوامل والمتغيرات الخاصة بالمشكلة كالموارد المتاحة والمستوى التقني ونتائج البرامج المختلفة، وهذا يعني أنه لا مجال للاحتمالات في أسلوب البرمجة الخطية حيث أنه من الأساليب المحددة وهذا يعني أن هذا الأسلوب يصلح للتطبيق في محيط التأكد وفي حالة توفر المعلومات التامة ولا يصلح استخدامه في محيط المخاطرة وعدم التأكد.

5-يجب أن تكون كل العلاقات بين متغيرات المشكلة خطية، أي يكون بينها علاقة أو تناسب طردي.

6- يجب أن تأخذ جميع متغيرات المشكلة قيماً أو كميات موجبة أو تكون مساوية للصفر، أي لا يسمح لها بأن تأخذ قيماً أو كميات سالبة.

7- يجب أن يتم التعامل مع فترة زمنية واحدة، وهذا يعني أن أسلوب البرمجة الخطية أسلوب ثابت غير حركي لا يهتم بدراسة أثر النتائج في فترة معينة على الفترات الأخرى (Static State).

8- يجب أن تكون عوامل المتغيرات في كل من الهدف والموارد الاقتصادية المتاحة ثابتة خلال الفترة الزمنية التي يعد عنها البرنامج الأمثل.

9- يجب أن يكون هناك حدوداً ثابتة للموارد الاقتصادية المتاحة، حيث أنه لولا وجود مثل هذه الحدود الثابتة أو القيود لما كان هناك مشكلة أصلاً، ولما كان هناك داعي لاستخدام أسلوب البرمجة.

10- يجب أن يكون هناك بدائل يتم الاختيار بينها، وقد تأخذ تلك البدائل صورة تشكيلات مختلفة من المنتجات.

6- بناء (أو صياغة) النموذج الرياضي لأسلوب البرمجة الخطية:

فإذا كان أمام متخذ القرار في إحدى المنشآت مجموعة من البدائل أو الخطط البديلة (للإنتاج – التسويق – التخزين – النقل – الاستثمار ....) والمطلوب المفاضلة بين هذه الخطط البديلة وفقاً لدالة هدف معينة يحددها متخذ القرار، فإن أسلوب البرمجة الخطية يتكون من ثلاثة أجزاء أساسية هي:

1- **دالة الهدف:** قد تكون دالة الهدف دالة ربح أو دالة تكلفة.

- **دالة الربح:** يكون المطلوب هو تعظيم هذه الدالة أي تحقيق النهاية العظمى لدالة الربح، بمعنى اختيار الخطة التي تحقق للمشروع أكبر أرباح ممكنة.
- **دالة التكلفة:** يكون المطلوب هو تخفيض (تدنية) دالة التكلفة أي تحقيق النهاية الصغرى لهذه الدالة، بمعنى اختيار الخطة التي تحقق للمشروع أقل تكلفة ممكنة.

2-مجموعة من القيود على دالة الهدف (قيود المشكلة) وهي تعبر عن الإمكانيات والموارد المتاحة وهي عبارة عن مجموعة علاقات خطية متداخلة بين المتغيرات التي تعبر عن المشكلة بحيث يمكن تمثيلها في شكل متباينات أو معادلات رياضية.

3- قيود أخرى على المتغيرات التي تدخل في تركيب النموذج، مثل قيود عدم السلبية (عدم سلبية المتغيرات) وهذا يتطلب عند حل المشكلة بيانياً أن يتم العرض البياني للعلاقات في الربع الأول فقط، حيث أن قيم (X) و(Y) موجبة، وعند حل المشكلة جبرياً باستخدام طريقة السمبلكس فإن قيم المتغيرات تكون موجبة ويمكن التعبير عن ذلك رياضياً كما يلي:

- قد يكون المطلوب مثلاً تعظيم أو تخفيض الدالة Max or Min

$$F(X) = C_1 X_1 + C_2 X_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + C_n X_n$$

- في ظل القيود التالية:

$$a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + \ldots\ldots\ldots a_{1n}X_n \begin{matrix} \geq \\ = \\ \leq \end{matrix} R_1$$

$$a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + \ldots\ldots\ldots a_{2n}X_n \begin{matrix} \geq \\ = \\ \leq \end{matrix} R_2$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \qquad \vdots$$

$$a_{m1}X_1 + a_{m2}X_2 + \ldots\ldots\ldots a_{mn}X_n \begin{matrix} \geq \\ = \\ \leq \end{matrix} R_m$$

- شرط عدم السلبية:

$x_i \geq 0 \ (i = 1, 2, 3 \ldots n)$

وبالتالي فإنه يمكن التوصل إلى الصيغة الرياضية العامة السابقة وكتابتها بالشكل التالي:

- دالة الهدف — Max or Min

$$F(X) = \sum_{j=1}^{n} c_j X_j$$

- في ظل القيود: — Subject to:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j \begin{bmatrix} \leq \\ = \\ \geq \end{bmatrix} b_i$$

-شرط عدم السلبية — Non Negative Condition

$X_j \geq 0$

حيث أن: a_{ij} , b_i , c_j ثوابت

ويمكن استخدام المصفوفات في صياغة نموذج البرمجة الخطية كما يلي:

-دالة الهدف: Max or Min

$$F(X)=\begin{bmatrix}C_1 & C_2 & C_3\ldots\ldots C_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}X_1\\X_2\\\vdots\\X_3\end{bmatrix}$$

-القيود Subject to:

$$\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\\vdots & \vdots & & \\a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}X_1\\X_2\\\vdots\\X_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\geq\\=\\\leq\end{bmatrix}\begin{bmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_3\end{bmatrix}$$

-شرط عدم السلبية:

$X_j \geq 0$

وبذلك فإن الصيغة العامة لأسلوب البرمجة الخطية وفقاً لنظام المصفوفات هي:

- دالة الهدف: Max or Min

$$F(x) = C'x$$

- القيود Subject to:

$$Ax\begin{bmatrix}\geq\\=\\\geq\end{bmatrix}b$$

- شرط عدم السلبية: non-Negative

$$X \geq 0$$

ويلاحظ مما تقدم أن:

1- أن دالة الهدف F(x) هي دالة خطية.

2- أن القيود كلها خطية وتأخذ شكل متباينات أو معادلات أو خليط منهما.

3- أن الحل المقبول هو الذي يعطي قيماً غير سالبة للمتغيرات $x_1, x_2, x_3,..$ $.x_n$

مما سبق يتضح أن هذه الخصائص تجعل أسلوب لاجرانج Lagrange غير ملائم لحل هذه المشاكل، مما يجعلنا نحتاج إلى استخدام أسلوب جديد وهو أسلوب البرمجة الخطية.



استخدام الطريقة البيانية في حل نماذج البرمجة الخطية

Graphical Method of Solving L.P Models

2

الفصل الثاني
استخدام الطريقة البيانية في حل نماذج البرمجة الخطية
Graphical Method of Solving L.P Models

1- مقدمة:

تعتبر الطريقة البيانية من أبسط طرق حل نماذج البرمجة الخطية، ولها ميزة كبيرة في إيضاح طبيعة المشاكل التي تحل بأسلوب البرمجة الخطية وكذلك إجراءات حلها دون تعقيدات رياضية، وبذلك فهي تعتبر بمثابة مدخل ملائم لشرح المشاكل التي تحل بأسلوب البرمجة الخطية، وعلى ذلك تعتبر الطريقة البيانية ذات فائدة محدودة، حيث يقتصر تطبيقها على النماذج والتي تحتوي على متغيرين اثنين فقط، ويصعب استخدامها وتطبيقها على النماذج ذات المتغيرات المتعددة، وذلك يرجع إلى أن الرسم البياني دائماً يوضع على محورين وإحداثيين اثنين فقط، أحدهما المحور الأفقي، والآخر المحور الرأسي، وبالتالي فإن المشاكل ذات المتغيرات المتعددة تستلزم أبعاداً بيانية متعددة وتحتاج إلى نظريات هندسية خاصة.

وتقوم الطريقة البيانية على مجموعة من الإجراءات أو الخطوات المنطقية المنظمة، يتم تطبيقها على النماذج الرياضية للبرمجة الخطية والتي تم صياغتها تعبيراً عن المشكلة المطلوب حلها، ويتم ذلك من خلال:

1- التمثيل البياني للقيود (متباينات أو معادلات).

2-التمثيل البياني لدالة الهدف، حيث أنه بعد الانتهاء من رسم القيود بيانياً وتحديد مواقعها على الرسم البياني، يتم تمثيل دالة الهدف بيانياً سواء كانت لتعظيم الأرباح أو لتخفيض التكاليف، ويتم رسم دالة الهدف بيانياً بافتراض أرقام مبالغ فيها في حالة تعظيم الأرباح وبافتراض أرقام قليلة تقترب من الصفر في حالة تخفيض التكاليف، فينتج عن ذلك خطوط متوازية لدالة الهدف.

3-استخراج الحل أو الحلول المثلى من الرسم البياني.

2- مزايا وعيوب الطريقة البيانية في حل نماذج البرمجة الخطية:

أن البرمجة الخطية هي طريقة تحديد الحل الأمثل أو المزيج الأمثل للأنشطة أو متغيرات القرار ذات الاعتماد المتبادل بسبب الموارد المتاحة النادرة خلال فترة زمنية معينة، وعند الاعتماد على الحل البياني في حل

نماذج البرمجة الخطية فإنه يتم تمثيل القيود بمنحنيات دالة (خطوط مستقيمة) على الشكل البياني من أجل صنع أو تكوين ما يسمى بمنطقة الحل الممكن والتي تمثل النقاط القصوى فيها نقاط الحل، أي نقطة أو أكثر منها تمثل الحل الأمثل.

مزاياها:

-أنها أداة فعالة لحل المشاكل الإدارية والاقتصادية والمالية ذات المتغيرين.

- أنها تحقق الاستخدام الأمثل للموارد المتاحة النادرة في محيط التأكد وعند توفر المعلومات.

- إن الطريقة البيانية تقدم صورة واضحة للعلاقات الموجودة بين الموارد.

- إمكانية استخدام أسلوب تحليل الحساسية للتوصل إلى الحل الأمثل عند تغير الموارد المتاحة.

عيوبها:

- أن الطريقة البيانية لا يمكن استخدامها في حل المشاكل ذات ثلاثة متغيرات أو أكثر.

- أنها تكون ذات هدف واحد (تخفيض تكلفة أو تعظيم الربح).

- محدودة الاستعمال حيث لا تعمل في محيط عدم التأكد والمخاطرة وهما المحيطان السائدان في الحياة الاقتصادية المعاصرة.

- تتعرض الطريقة البيانية لما يسمى بالحالات الخاصة التي تتسم بعدم التوصل إلى الحل الأمثل فيها.

وبعد استعراض خطوات تطبيق الطريقة البيانية في حل أسلوب البرمجة الخطية سنحاول فيما يلي تطبيقها على حالتين هما الحالة الأولى خاصة بمشكلة تعظيم الأرباح والحالة الثانية خاصة بمشكلة تخفيض التكاليف وذلك لشرح الإجراءات الفنية والتفصيلية الخاصة باستخدام الطريقة البيانية في حل نماذج البرمجة الخطية، وهذا ما يتضح من الأمثلة التالية.

3- استخدام أسلوب البرمجة في حل مشاكل تعظيم الربح:

مثال(1): حدد النهاية العظمى لدالة الربح التالية بيانياً باستخدام أسلوب البرمجة الخطية:

$$Max$$
$$Z = 10x + 8y$$
$$Subjet\ \ to$$
$$x + 3y \leq 12$$
$$3x + 2y \leq 18$$
$$2x + 3y \leq 15$$
$$Non\ negative\ condition$$
$$x \geq 0 \qquad y \geq 0$$

خطوات الحل:

1- تحويل المتباينات (القيود) Inequalities إلى معادلات (متساويات) equalities.

$$x + 3y = 12$$
$$3x + 2y = 18$$
$$2x + 3y = 15$$

2- رسم المعادلات الثلاثة بيانياً وذلك بإيجاد الجزء المقطوع من المحور الأفقي (x) بالتعويض عن (y = 0) وكذلك تحديد الجزء المقطوع من المحور الرأسي (y) وذلك بالتعويض عن x = 0.

أي نقوم بقسمة الحد المطلق على معامل x فينتج الجزء المقطوع من المحور الأفقي، ثم قسمة الحد المطلق على معامل (y) فينتج الجزء المقطوع من المحور الرأسي كما يلي:

المعادلة الأولى: $x + 3y = 12$

عندما x = 0 فإن:

$$0 + 3y = 12$$
$$3y = 12$$
$$y = \frac{12}{4} = 4$$

النقطة الأولى: $(0 \;,\; 4)$

عندما $0 = y$

$$x + 3(0) = 12$$
$$x = 12$$

النقطة الثانية: $(12 \;,\; 0)$

إذن لرسم المعادلة (1) نحتاج:

x	0	12
y	4	0

المعادلة الثانية: $3x + 2y = 18$

عندما $x = 0$ فإن:

$$3(0) + 2y = 18$$
$$2y = 18$$
$$y = \frac{18}{2} = 9$$

النقطة الأولى: $(0 \;,\; 9)$

عندما $y = 0$ فإن:

$$3x + 2(0) = 18$$
$$3x = 18$$
$$x = \frac{18}{3} = 6$$

النقطة الثانية: $(6 \;,\; 0)$

إذن لرسم المعادلة (2) نحتاج:

x	0	6
y	9	0

المعادلة الثالثة: $2x + 3y = 15$

عندما $x = 0$ فإن:

$$2(0) + 3y = 15$$
$$3y = 15$$
$$y = \frac{15}{3} = 5$$

النقطة الأولى: $(0 \;,\; 5)$

عندما y = 0 فإن:

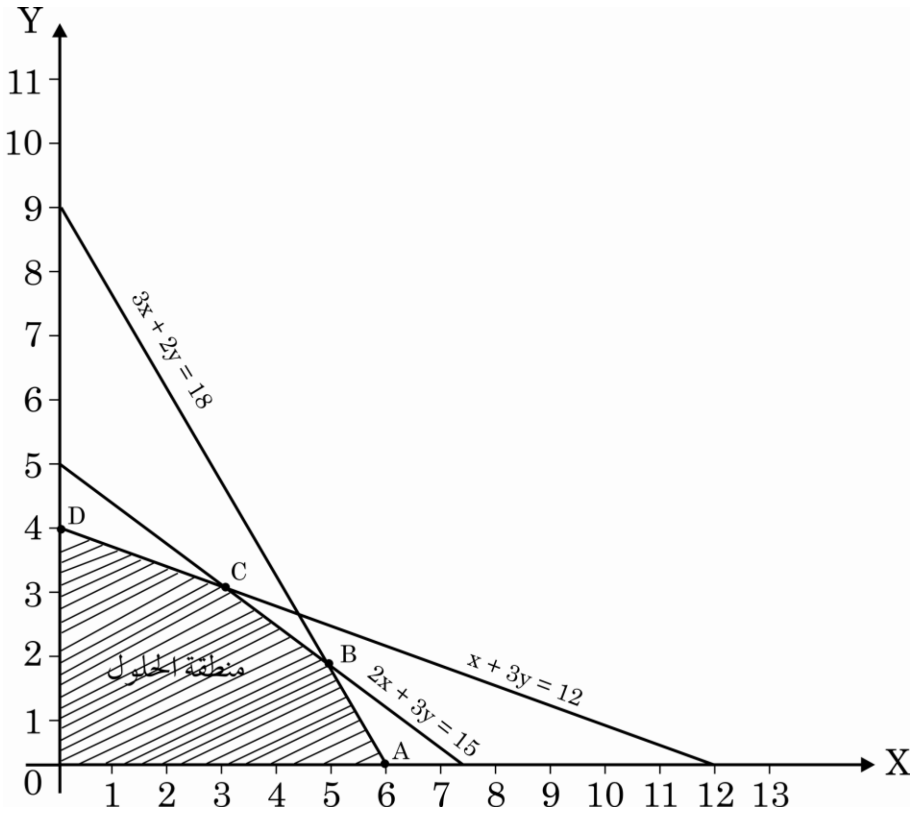
$$2x + 3(0) = 15$$
$$2x = 15$$
$$x = \frac{15}{2} = 7,5$$

النقطة الثانية: (7,5 , 0)

إذن لرسم المعادلة (3) نحتاج:

x	0	,57
y	5	0

وبتمثيل هذه المعادلات الثلاثة بيانياً كما يلي:



شكل (1) يوضح الحل البياني لمشكلة تعظيم الربح

حيث أن المتباينات أقل من أو تساوي فتكون منطقة الحلول المشتركة هي (E, D, C, B, A) وأي نقطة تقع داخل المنطقة المظللة دالة الهدف.

فيكـــون مطلـــوب منـــا تحديـــد النقطـــة (B)، والنقطـــة (C) وذلـــك بحـــل المعادلتين الذين يمثلهم خطوط الرسم البياني ولذا فإنـه لإيجـاد قيمـة النقطـة (B) يتم حل المعادلتين:

$$3x + 2y = 18$$
$$2x + 3y = 15$$

بضرب المعادلة الأولى × 2، والمعادلة الثانية × 3

$$6x + 4y = 36$$
$$- \quad - \quad -$$
$$6x + 9y = 45$$

بالطرح $\quad -5y = -9$

$$\therefore \quad y = \frac{-9}{-5} = 1.8 \approx \boxed{2}$$

بالتعويض في إحدى المعادلتين:

$$3x + (2 \times ,18) = 18$$
$$3x + 3.6 = 18$$
$$3x = 18 - 3.6$$
$$3x = 14.4$$
$$x = \frac{14.4}{3} = 4.8 \approx \boxed{5}$$
$$(5 , 2)$$

لإيجاد قيمة النقطة C يتم حل المعادلتين:

$$x + 3y = 12$$
$$2x + 3y = 15$$

بالطرح:

$$x + 3y = 12$$
$$- \quad - \quad -$$
$$2x + 3y = 15$$
$$x = -3$$
$$x = \boxed{3}$$

بالتعويض في إحدى المعادلتين:

$$3 + 3y = 18$$
$$3y = 12 - 3$$
$$3y = 9$$
$$y = \boxed{3}$$
$$(3\ ,\ 3)$$

فتكون نقاط الحل هي:

A هي (0، 6) ، B هي (2، 5)

C هي (3، 3) ، D هي (4، 0)

E هي (0، 0)

ثم بالتعويض في دالة الهدف: $Z = 10x + 8y$

وذلك كما يلي:

جدول (1)
يوضح عملية اتخاذ القرار الأمثل

الناتج	دالة الهدف $z = 10x + 8y$	نقاط الحل
60	$z = 10 \times 6 + 8 \times 0$	$A \rightarrow (6\ ,0)$
66	$z = 10 \times 5 + 8 \times 2$	$B \rightarrow (5, 2)$
54	$z = 10 \times 3 + 8 \times 3$	$C \rightarrow (3, 3)$
32	$z = 10 \times 0 + 8 \times 4$	$D \rightarrow (0, 4)$
0	$z = 10 \times 0 + 8 \times 0$	$E \rightarrow (0, 0)$

وبالتالي تتحقق النهاية العظمى لدالة الربح عند النقطة B حيث تصل الأرباح إلى 66 ويتحد برنامج الإنتاج الأمثل عندما $x = 5$, $y = 2$.

مثـال(2): تقـوم شـركة النهضـة العربيـة لصـناعة الأجهـزة الكهربائيـة بـالتخطيط لإنتـاج أجهـزة التليفزيـون وأجهـزة الراديـو، فـإذا كـان إنتـاج جهـاز التليفزيـون الواحـد يحتـاج إلـى سـاعتان عمـل فـي قسـم التجميـع وثلاث ساعات عمل في قسم الاختبارات، وإنتاج الراديو الواحد يحتـاج إلــى أربعــة ســاعات عمــل فــي قســم التجميــع وســاعة واحــدة فــي قسـم الاختبارات، فإذا علمت أن العائد من بيع كل جهاز تلفزيون هو 100 دولار بينما العائد من بيع كل جهاز راديو هو 80 دولار، فإذا علمت أن

طاقة قسم التجميع هي 80 ساعة أسبوعياً وطاقة قسم الاختبارات هي 60 ساعة أسبوعياً.

المطلوب: حدد الكمية الواجب إنتاجها من أجهزة التليفزيون والراديو حتى تحقق الشركة أقصى ربح ممكن.

خطوات الحل:

يمكن استخراج المعطيات من المثال السابق في الجدول التالي:

المنتجات / الأقسام	أجهزة التليفزيون (x)	أجهزة الراديو (y)	الطاقة المتاحة
قسم التجميع	2	4	80
قسم الاختبارات	3	1	60
الربح	100	80	

1- يمكن صياغة مشكلة البرمجة الخطية كما يلي:

- تعظيم دالة الربح: Max

$$Z = 100x - 80y$$

- القيود: Subj. to:

$$2x + 4y \le 80$$
$$3x + \ \ y \le 60$$

- شرط عدم السلبية: non negative

$$x \ge 0 \qquad y \ge 0$$

2- بتحويل متباينات القيود إلى معادلات.

$$2x + 4y = 80$$
$$3x + \ \ y = 60$$

3- رسم المعادلات:

المعادلة الأولى: $2x + 4y = 80$

عندما x = 0 فإن:

$$0 + 4y = 80$$
$$y = \frac{80}{4} = 20$$

تكون النقطة الأولى هي: (0 , 20)

عندما y = 0

$$2x + 0 = 80$$

$$x = \frac{80}{2} = 40$$

النقطة الثانية هي: $(40 \ , \ 0)$

إذن لرسم المعادلة (1) نحتاج:

40	0	x
0	20	y

المعادلة الثانية:

$$3x + y = 60$$

عندما x = 0 فإن:

$$y = 60$$

تكون النقطة الأولى هي: $(0 \ , \ 60)$

عندما y = 0 فإن:

$$3x + 0 = 60$$

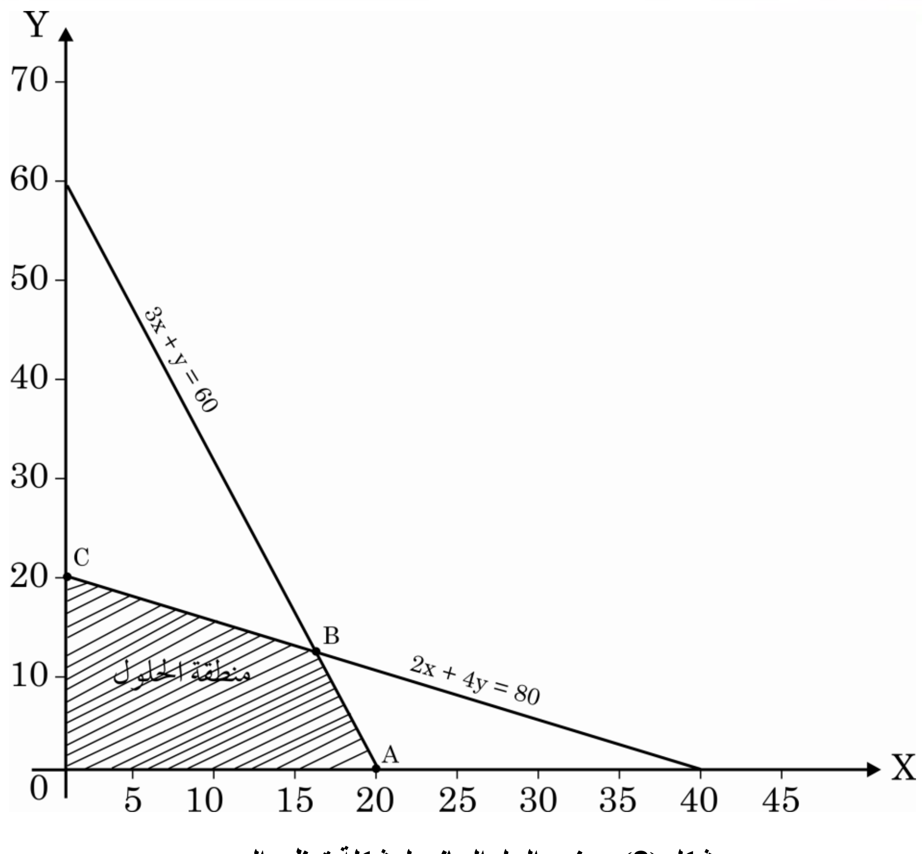
$$x = \frac{60}{3} = 20$$

النقطة الثانية: $(20 \ , \ 0)$

إذن لرسم المعادلة (2) نحتاج:

20	0	x
0	60	y

يتم رسم المعادلات السابقة كما يلي:



شكل (2) يوضح الحل البياني لمشكلة تعظيم الربح

تكون نقاط الحل هي: (D, C, B, A)

وحتى يمكن تحديد النقطة B لا بد من حل المعادلتين معاً:

$$2x + 4y = 80$$
$$3x + y = 60$$

بضرب المعادلة الثانية × 4

$$2x + 4y = 80$$
$$- \quad - \quad -$$
$$12x + 4y = 240$$
$$-10x = -160$$
$$x = \frac{-160}{10} = \boxed{16}$$

بالتعويض في إحدى المعادلتين عن قيمة x لإيجاد قيمة y:

$$2(16) + 4y = 80$$

$$32 + 4y = 80$$

$$4y = 80 - 32$$

$$4y = 48$$

$$y = \frac{48}{4} = \boxed{12}$$

∴تكون النقطة B هي: (16 ،12)

وبذلك تكون قيم النقاط هي :

A → (20 , 0)
B → (16, 12)
C → (0 , 20)
D → (0, 0)

بالتعويض في دالة الهدف كما يلي:

جدول (2)
يوضح عملية اتخاذ القرار الأمثل

نقاط الحل هي	دالة الهدف z = 100x + 80y	الناتج
(20 ,0) ←A	z = (100 ×20) + 0	2000
(16, 12) ←B	z = 100 ×16 + 80 × 12	2560
(0, 20) ←C	z = 100 ×0 + 80 × 20	1600
(0, 0) ←D	z = 0 + 0	0

يتحقق أقصى ربح وهو (2560) عند إنتاج (16) جهاز تلفزيون، 12 جهاز راديو حتى تحقق الشركة أقصى ربح ممكن.

مثال(3): المطلوب تعظيم دالة الربح التالية: Max

$Z = 3x + 4y$

في ظل القيود: Subj. to

$$x + y = 40$$

$$x \geq 8$$

$$y \geq 16$$

شرط عدم السلبية: non negative condition

$$x \geq 0 , y \geq 0$$

خطوات الحل:

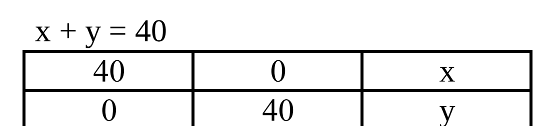
- تحويل المتباينات إلى معادلات.

$$x + y = 40$$
$$x = 8$$
$$y = 16$$

- رسم المعادلات:

المعادلة الأول: x + y = 40

إذن لرسم المعادلة (1) نحتاج:

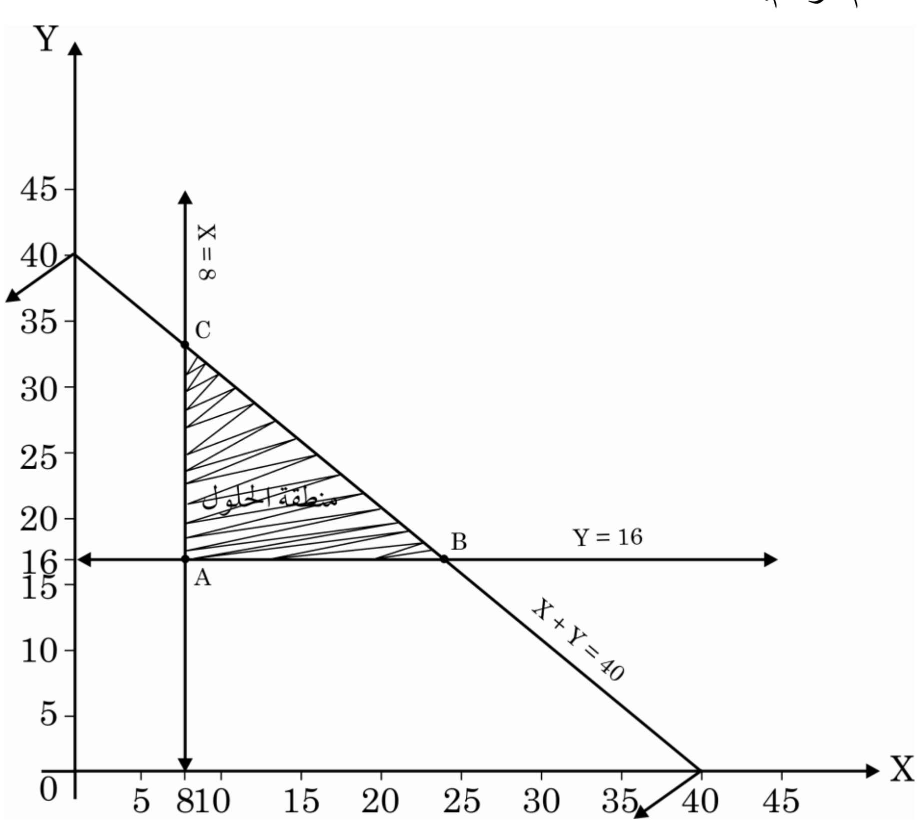


40	0	x
0	40	y

لرسم المعادلة الثانية: x = 8

لرسم المعادلة الثالثة: y = 16

ثم الرسم:



شكل (3) يوضح الحل البياني لمشكلة تعظيم الربح

النقاط، C, B, A هي النقاط التي تمثل الحل الأمثل ويتم حل المعادلات لإيجاد قيم النقاط:

النقطة A هي (16، 8)، النقطة B هي (16، 24)، النقطة C هي (32، 8).

بالتعويض في دالة الهدف كما يلي:

جدول (3)
يوضح عملية اتخاذ القرار الأمثل

نقاط الحل	دالة الهدف z = 3x + 4y	الناتج
(8 ,16) ←A	z = 3(8) + 4 (16) = 24 + 64 =	88
(24, 16) ←B	z = 3(24) + 4 (16) = 72 + 64 =	136
(8, 32) ←C	z = 3(8) + 4 (32) = 24 + 128 =	152

يتحقق أقصى ربح وهو 152 دولار عندما y = 32 ,x = 8

4- استخدام أسلوب البرمجة الخطية في حل مشاكل تخفيض التكاليف:

مثال(1): حدد النهاية الصغرى لدالة التكاليف التالية:

$$Min$$
$$C = 2x + 5y$$
$$Subj.\ to$$
$$x + 2y \le 40$$
$$2x + y \le 40$$
$$x + y \ge 10$$
$$Non\ negtive\ condition$$
$$x \ge 0 \qquad y \ge 0$$

1- تحويل المتباينات إلى معادلات:

$$x + 2y = 40$$
$$2x + y = 40$$
$$x + y = 10$$

2- رسم المعادلات السابقة وهي التي تمثل القيود:

- **المعادلة الأول:** $x + 2y = 40$

عندما x = 0 فإن:

$0 + 2y = 40$

$y = 20$

النقطة الأولى: (0 , 20)

عندما y = 0 فإن:

$x + 0 = 40$

$x = 40$

النقطة الثانية: (40 , 0)

إذن لرسم المعادلة (1) نحتاج:

x	0	40
y	20	0

• **المعادلة الثانية:** 2x + y = 40

عندما x = 0 فإن:

$0 + y = 40$

$y = 40$

النقطة الأولى: (0 , 40)

عندما y = 0 فإن:

$2x + 0 = 40$

$x = 20$

النقطة الثانية: (20 , 0)

إذن لرسم المعادلة (2) نحتاج:

x	0	20
y	40	0

• **المعادلة الثالثة:** *x + y = 0*

عندما x = 0 فإن:

$0 + y = 10$

$y = 10$

النقطة الأولى هي: (0 , 10)

عندما y = 0 فإن:

$x + 0 = 10$

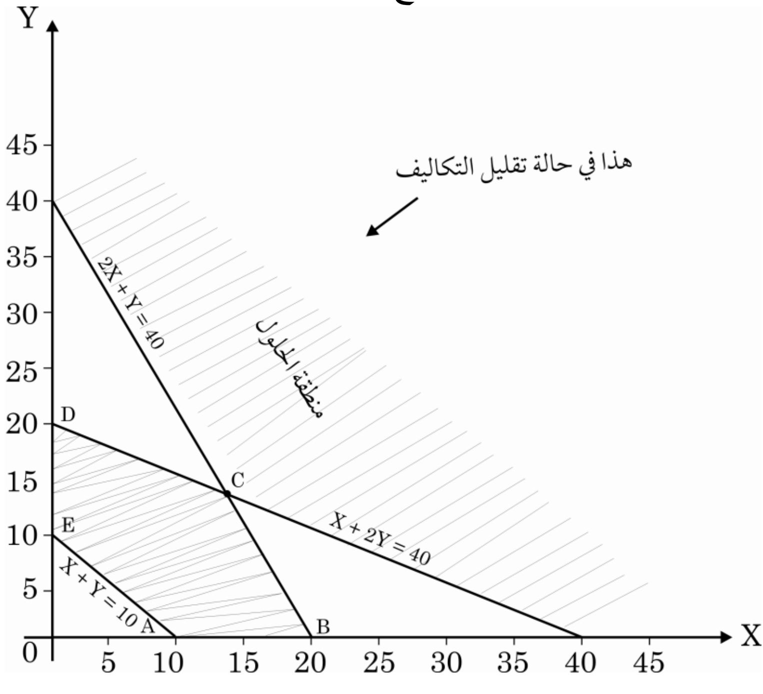
$x = 10$

النقطة الثانية: (10 , 0)

إذن لرسم المعادلة (3) نحتاج:

x	0	10
y	10	0

وبتمثيل هذه المعادلات بيانياً ينتج لنا:



شكل (4) يوضح الحل البياني للمشكلة

من الرسم يتضح لنا أن النقاط التي يمكن أن تحقق المتباينات هي E , D, C , B , A ولذا لا بد من تحديد قيمة النقطة (C) وذلك بحل المعادلتين معاً:

$$2x + y = 40$$
$$x + 2y = 40$$

بضرب المعادلة الأولى × 2.

$$4x + 2y = 80$$
$$- \quad - \quad -$$
$$x + 2y = 40$$
$$3x = 40$$

$$3x = 40 \qquad x = \frac{40}{3} = 13.3 \approx 13$$

بالتعويض في إحدى المعاملتين عن قيمة x لإيجاد قيمة y.

$2(13) + y = 40$

$y = 14$

النقطة (2) هي: (13 ،14)

وبذلك تكون نقاط الحل هي:

$A \rightarrow (10, 0)$

$B \rightarrow (20, 0)$

$C \rightarrow (13, 14)$

$D \rightarrow (0, 20)$

$E \rightarrow (0, 10)$

ثم بالتعويض في دالة الهدف وهي دالة التكاليف:

جدول (4)
يوضح عملية اتخاذ القرار الأمثل

نقاط الحل	دالة الهدف z = 10x + 8y	الناتج
A→ (10 ,0)	C = 2 (10) + 0	20
B→ (20, 0)	C = 2 (20) + 0	40
C→ (13, 14)	C = 2 (13) + 5 (14)	96
D→ (0, 20)	C = 0 + 5 (20)	100
E→ (0, 10)	C = 0 + 5 (10)	50

وبذلك تتحقق أقل تكلفة عند النقطة A وهي تمثل إنتاج 10 وحدات فقط من المنتج x ولا شيء من المنتج (y).

مثال(2): تقوم شركة المنال التجارية لتصنيع السيارات بإنتاج نوعين من السيارات هما مرسيدس 180، مرسيدس 220، فإذا كان إنتاج السيارة الواحدة من النوع الأول يحتاج إلى ساعة عمل في القسم الأول، 6 ساعات عمل في القسم الثاني، 8 ساعات عمل في القسم الثالث، بينما إنتاج السيارة الواحدة من النوع الثاني يحتاج إلى ساعتان عمل في القسم الأول، ساعتان عمل في القسم الثاني، 4 ساعات عمل في القسم الثالث، فإذا كان الطاقة المتاحة للمراكز الثلاثة هي 10، 36، 56 ساعة عمل في الأسبوع على الترتيب فإذا علمت أن إنتاج السيارة الواحدة من النوع

الأول يكلف الشركة 50 ألف دولار بينما إنتاج السيارة الواحدة من النوع الثاني يكلف الشركة 30 ألف دولار.

المطلوب: تحديد الكمية الواجب إنتاجها من كل نوع حتى تحقق الشركة أقل تكلفة ممكنة.

خطوات الحل:

يمكن التعبير عن معطيات المشكلة من خلال الجدول التالي:

المنتجات / القسم	مرسيدس 180 (x)	مرسيدس 220 (y)	الطاقة المتاحة
القسم الأول	1	2	10
القسم الثاني	6	2	36
القسم الثالث	8	4	56
التكلفة	50	30	

وبذلك يمكن صياغة المشكلة في صورة معادلات خطية كما يلي:

- دالة الهدف: Min

$$C = 50x + 30y$$

-دوال القيود: Subject to

$$x + 2y \geq 10$$
$$6x + 2y \geq 36$$
$$8x + 4y \geq 56$$

- شرط عدم السلبية:

$$x \geq 0, y \geq 0$$

وحتى يمكن حل المشكلة فإنه يتبع الخطوات التالية:

- تحويل المتباينات إلى معادلات:

$$x + 2y = 10$$
$$6x + 2y = 36$$
$$8x + 4y = 56$$

- رسم المعادلات وذلك كما يلي:

-المعادلة الأول: $x + 2y = 10$

عندما $x = 0$ فإن:

$0 + 2y = 10$

$$y = \frac{10}{2} = 5$$

النقطة الأولى: $(0 \ , \ 5)$

عندما $y = 0$ فإن:

$x + 0 = 10$

$x = 10$

النقطة الثانية: $(10 \ , \ 0)$

إذن لرسم المعادلة (2) نحتاج:

10	0	x
0	5	y

المعادلة الثانية: $6x + 2y = 36$

عندما $x = 0$ فإن:

$0 + 2y = 36$

$$y = \frac{36}{2} = 18$$

النقطة الأولى: $(0 \ , \ 18)$

عندما $y = 0$ فإن:

$6x + 0 = 36$

$$x = \frac{36}{6} = 6$$

النقطة الثانية: $(6 \ , \ 0)$

إذن لرسم المعادلة (2) نحتاج:

6	0	x
0	18	y

المعادلة الثالثة: $8x + 4y = 56$

عندما $x = 0$ فإن:

$0 + 4y = 56$

$$y = \frac{56}{4} = 14$$

النقطة الأولى: (0 , 14)

عندما y = 0 فإن:

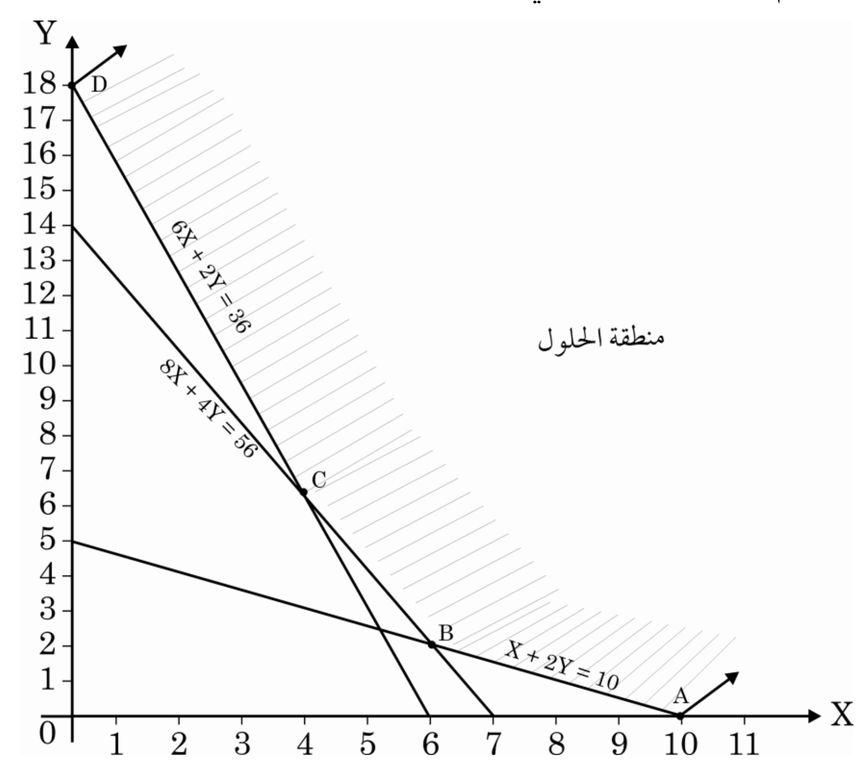
$$8x + 0 = 56$$

$$x = \frac{56}{8} = 7$$

النقطة الثانية: (7 , 0)

إذن لرسم المعادلة (3) نحتاج:	x	0	7
	y	14	0

- رسم دوال القيود كما يلي:



شكل (5) يوضح الحل البياني لمشكلة تقليل التكاليف

وبالتالي فإن النقاط التي تمثل الحل هي D, C, B, A ولذا فإنه يلزم معرفة قيم النقاط B , C وذلك بحل المعادلات التي تمثل الخطوط المستقيمة.

لإيجاد قيمة (B) فإنه يتم حل المعادلتين:

$$8x + 4y = 56$$
$$x + 2y = 10$$

بضرب المعادلة الثانية × 2

$$8x + 4y = 56$$
$$- \quad - \quad -$$
$$2x + 4y = 20$$
$$6x = 36$$
$$x = \frac{36}{6} = 6$$

بالتعويض في إحدى المعادلتين:

$$8(6) + 4y = 56$$
$$48 + 4y = 56$$
$$4y = 56 - 48$$
$$4y = 8$$
$$y = \frac{8}{4} = 2$$

النقطة B هي (2 ، 6)

لإيجاد قيم النقطة (C) فإنه يتم حل المعادلتين:

$$8x + 4y = 56$$
$$8x + 4y = 36$$

بضرب المعادلة الثانية × 2

$$8x + 4y = 56$$
$$- \quad - \quad -$$
$$12x + 4y = 72$$
$$-4x = -16$$
$$x = \frac{-16}{-4} = 4$$

بالتعويض في إحدى المعادلتين:

$$8(4) + 4y = 56$$
$$32 + 4y = 56$$
$$4y = 24$$
$$y = \frac{24}{4} = 6$$

النقطة C هي (4 ، 6)

A ← (10 ،0)

B ← (6 ،2)

C ← (4 ،6)

D ← (0 ،18)

بالتعويض في دالة الهدف:

جدول (5)
يوضح عملية اتخاذ القرار الأمثل

نقاط الحل	دالة الهدف z = 10x + 8y	الناتج
A→ (10 ,0)	C = 50 (10) + 0	500
B→ (6, 2)	C = 50 (6) + 30 × (2)	360
C→ (4, 6)	C = 50 (4) + 30 (6)	380
D→ (0, 18)	C = 0 + 30 × (18)	540

تتحقق أقل تكلفة وهي 360 ألف دولار عند إنتاج 6 سيارات من النوع الأول، سيارتان من النوع الثاني.

الفصل الثالث

استخدام طريقة السمبلكس في حل نماذج البرمجة الخطية

Simplex Method of Solving L.P Models

3

الفصل الثالث
استخدام طريقة السمبلكس The Simplex Method في حل نماذج البرمجة الخطية (L.P)

1- مقدمــة:

تعتبر طريقة السمبلكس هي الطريقة العامة لحل معظم نماذج البرمجة الخطية، حيث تغلبت على قصور الطريقة البيانية، وذلك باستخدامها في حل الأنواع المختلفة من نماذج البرمجة الخطية التي تتضمن متغيرات متعددة، حيث أنها تستخدم الحاسب الآلي في حل وإجراء العمليات الحسابية للمشكلة، ولذا فإنها تستخدم عدد كبير من المتغيرات، ولذلك فإن طريقة السمبلكس تعتبر من أكثر الطرق استخداماً وشيوعاً في حل مشاكل البرمجة الخطية، وقد تبين لنا في الفصل السابق أن الطريقة البيانية في حل نماذج البرمجة الخطية لا تمكننا من التعامل مع المشاكل التي تتضمن أكثر من متغيرين (x , y) وذلك بسبب عدم قدرتنا على تحديد نقطة لها أكثر من بعدين على سطح الرسم البياني ذي البعدين (الأفقي x، الرأسي y) وتتمثل الميزة الأساسية للطريقة البيانية في أنها تمكننا من فهم جوهر البرمجة الخطية.

وتعتمد طريقة السمبلكس على خصائص المصفوفات الرياضية، حيث يتم ترتيب المتغيرات وترتيب عواملها على هيئة مصفوفة رياضية تشتمل على دالة الهدف وهي تمثل رأس الجدول بينما يشتمل جسم الجدول على مصفوفة رياضية مأخوذة من معادلات القيود في النموذج الرياضي الذي يمثل المشكلة.

وتقوم طريقة السمبلكس على أساس البحث عن الحل الأمثل للمشكلة بتصميم جدول حل مبدئي ممكن ثم اختبار هذا الحل، فإذا كان هو الحل الأمثل يتم التوقف، أما إذا لم يكن كذلك فإنه يعدل ليكون حل آخر أفضل، ويخضع هذا الحل الأخير لاختبار المثالية أيضاً، وهكذا تستمر عملية الاختبار ولا تتوقف إلا بعد أن يتم التوصل إلى الحل الأمثل -إذا وجد-.

وتتميز طريقة السمبلكس بإتباعها تلك الخطوات المنتظمة في حل نماذج البرمجة الخطية بأن كل حل يتم التوصل إليه يكون أفضل من الحلول السابقة، كما تقوم تلك الطريقة على أن الحل الأمثل لا بد وأن

يكون أحد الحلول الممكنة، وتوضح طريقة السمبلكس أيضاً إمكانية وجود حلول مثلى بديلة متعددة.

2- خطوات تطبيق طريقة السمبلكس:

تقوم طريقة السمبلكس على مجموعة خطوات منتظمة للتوصل إلى الحل الأمثل، ويمكن تلخيص هذه الخطوات على النحو التالي(1):

2-1- تحديد عناصر المشكلة: وهي:

أ- تحديد المتغيرات الأصلية التي تتضمنها المشكلة.

ب- تحديد الهدف من حل المشكلة، وقد يكون تعظيم أرباح أو تخفيض تكاليف.

ج- تحديد القيود المفروضة على المشكلة.

2-2- تصميم النموذج الرياضي للمشكلة: ويتضمن ما يلي:

أ- تحديد دالة الهدف في شكل دالة رياضية من الدرجة الأولى (خطية).

ب-تحديد القيود من خلال وضع البيانات الفنية الخاصة بالقيود في شكل متباينات أو معادلات من الدرجة الأولى (خطية).

ج- تحويل المتباينات إلى معادلات عن طريق إضافة أو طرح متغيرات راكدة (معطلة) (Slack Variables) وهي عبارة عن متغيرات وهمية ويتم ذلك على النحو التالي:

- إذا كانت المتباينة من نوع **أقل من أو يساوي (≤) يضاف إليها المتغير الراكد** (أو المعطلة أو غير المستغلة) حتى تتحول إلى معادلة، وفي تلك الحالة تعتبر المتغيرات الراكدة متغيرات وهمية تعبر عن الطاقات العاطلة غير المستخدمة في البرنامج.
- إذا كانت المتباينة من نوع **أكبر من أو يساوي (≥) يطرح منها المتغير الراكد** حتى تتحول إلى معادلة، وفي تلك الحالة تعتبر المتغير الراكدة متغيرات وهمية تعبر عن القيم أو الكميات الفائضة أو الزائدة عن

---

(1) راجع قائمة المراجع وخاصة: د. محمد مصطفى الجبالي، د. سيد فتحي أبو الهنا، «دراسات محاسبية في الأساليب الكمية وبحوث العمليات»، أكاديمية المدينة، المعهد العالي للتكنولوجيا والإدارة، مصر، 2008/2007، (ص ص 29-43).

المطلوب في البرنامج، وحتى يمكن حل المشكلة في تلك الحالة لا بد من إضافة نوع آخر من المتغيرات يسمى بالمتغيرات الاصطناعية (Artificial Variables).

يضاف المتغير الاصطناعي للمتباينة بعد تحويلها إلى معادلة بالفعل بطرح المتغير الراكد منها، وذلك على أساس أن الاكتفاء بالمتغيرات الراكدة في حالة المتباينات من نوع أكبر من أو يساوي (≥) لا يمكن وضع حل مبدئي للمشكلة، حيث أننا في الحل المبدئي نعطي قيم صفرية للمتغيرات الأصلية، الأمر الذي يترتب عليه الحصول على قيم سالبة للمتغيرات الراكدة، كما سنوضحه فيما بعد، وهذا لا يساير شروط عدم السلبية. الأمر الذي يتطلب إضافة المتغيرات الاصطناعية، حيث يفترض أن معاملات المتغيرات الراكدة عبارة عن قيم صفرية، أما معاملات المتغيرات الاصطناعية فيفترض أنها متناهية في الكبر أي أنها عبارة عن (∞+) (زائد ما لا نهاية).

- أما إذا كان القيد ليس متباينة، بل مصاغ في شكل معادلة فليست هناك حاجة إلى استخدام متغير راكد ولكن من الضروري إضافة متغير اصطناعي، يمثل القيد في الحل المبدئي.

د- تحديد شرط عدم السلبية، والذي يتطلب أن تكون قيم كافة المتغيرات سواء كانت أصلية أو راكدة أو اصطناعية أكبر من، أو تساوي صفر (≥ 0).

2-3- إعداد الحل المبدئي:

ويتكون برنامج الحل المبدئي من المتغيرات الراكدة فقط في مشاكل التعظيم (تعظيم الربح)، ومن المتغيرات الاصطناعية فقط في مشاكل التخفيض (تخفيض التكلفة)، وبالتالي فإن العائد من الحل المبدئي إما أرباح قيمتها صفراً أو تكاليف قيمتها متناهية في الكبر، ويعد الحل المبدئي في شكل جدول يسمى جدول السمبلكس الأول، وهو بمثابة الجدول الأول من جداول السمبلكس المتتالية، حتى يتم التوصل إلى الحل الأمثل للمشكلة.

2-4- اختبار مثالية الحل المبدئي:

ويتم ذلك من خلال تحديد كيفية تحسين الحل عن طريق إدخال متغير من المتغيرات الموجودة خارج الحل المبدئي مكان أحد المتغيرات الراكدة

أو الاصطناعية، مع دراسة أثر ذلك على دالة الهدف، وذلك يعني الانتقال من جدول السمبلكس الأول إلى جدول آخر يتضمن حل أفضل من الحل السابق.

2-5- الاستمرار في عملية إعداد حلول أخرى أفضل من سابقتها واختبار مثاليتها:

ويتم ذلك حتى يمكن التوصل إلى أفضل حل ممكن وهو الحل الذي تتأكد مثاليته، ويصبح ليس في الإمكان أبدع مما كان، أي تستمر عملية الانتقال من جدول السمبلكس إلى جدول سمبلكس آخر بهدف تحسين الحل عن سابقه، إلى أن يتم التوصل إلى الحل الأمثل (Optimal Solution).

3- تطبيقات على استخدام السمبلكس في حل نماذج البرمجة الخطية

وفيما يلي بعض الأمثلة التي تبين كيفية بناء النموذج وحله باستخدام السمبلكس.

3-1- استخدام طريقة السمبلكس في حل نماذج تعظيم الربح (الحد الأقصى):

مثال (1): تقوم إحدى الشركات بإنتاج نوعين من الإنتاج هي x_1 , x_2، ويمر الإنتاج بقسمين للإنتاج هما قسم التصنيع وقسم التشطيب، حيث تبلغ الطاقة القصوى المتاحة لمركز التصنيع 9 ساعات، لمركز التشطيب 10 ساعات، ويحتاج إنتاج الوحدة من النوع الأول إلى 3 ساعات في قسم التصنيع، ساعتان في قسم التشطيب، بينما يحتاج إنتاج الوحدة الواحدة من النوع الثاني إلى ساعة واحدة في قسم التصنيع وساعتين في قسم التشطيب، فإذا كان ربح بيع الوحدة الواحدة من النوع الأول x_1 هو 4 دولار، ربح بيع الوحدة الواحدة من النوع الثاني x_2 هو 2 دولار.

المطلوب: تحديد عدد الوحدات الواجب إنتاجها من كل منتج بحيث تحقق الشركة أقصى ربح ممكن.

خطوات الحل:

1- استخراج المعطيات في الجدول التالي:

الطاقة المتاحة	النوع الثاني (x_2)	النوع الأول (x_1)	المنتجات / الأقسام
9	1	3	قسم التصنيع

قسم التشطيب	2	2	10
الربح	4	2	

2- تصميم النموذج الرياضي للمشكلة:

- دالة الهدف (تعظيم الربح):

Max

$$Z = 4X_1 + 2X_2$$

- في ظل القيود التالية:

Subj. to

$$3X_1 + X_2 \le 9$$

$$2X_1 + 2X_2 \le 10$$

- شرط عدم السلبية:

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$$

3- تحويل المتباينات إلى معادلات وإعادة تصميم النموذج الرياضي:

يتم تحويل المتباينات إلى معادلات في النموذج السابق بإضافة متغير راكد لكل متباينة، حيث أنها متباينة من نوع أقل من أو يساوي (≤) ويرمز للمتغير الراكد (s_1 , s_2 ,.....) حسب عدد المتباينات، وتعبر تلك المتغيرات الراكدة عن الطاقات العاطلة أو غير المستغلة إن وجدت، وتمثل المتغيرات الراكدة في دالة الهدف بمعاملات صفرية على أساس أنها لا تساهم في تحقيق الهدف المطلوب، كما ينطبق عليها شرط عدم السلبية وعليه:

- تكون دالة الهدف (تعظيم الربح) هي:

Max

$$Z = 4X_1 + 2X_2 + 0S_1 + 0S_2$$

- تكون القيود هي:

Subject to:

$$3X_1 + X_2 + S_1 = 9$$

$$2X_1 + 2X_2 + S_2 = 10$$

- يكون شرط عدم السلبية هو:

$$X_1, X_2, S_1, S_2 \ge 0$$

يلاحظ مما سبق أن:

- المتغيرات الراكدة S_1 , S_2 يمكن أن يكون لها كميات موجبة في حالة عدم استنفاذ الساعات المتاحة في مراكز الإنتاج في العمليات الإنتاجية.
- المتغيرات الراكدة S_1 , S_2 يمكن أن يكون لها كميات صفرية في حالة استنفاذ كل الساعات المتاحة في مراكز الإنتاج في العمليات الإنتاجية.

• المتغيرات الراكدة S_1 , S_2 لا يمكن أن يكون لها كميات سالبة وفقاً لشرط عدم السلبية.

4- أعداد الحل المبدئي:

يعتبر الحل المبدئي نقطة بداية لسلسلة من الحلول والبرامج تؤدي إل الحل الأمثل، ويعد الحل المبدئي في جدول سمبلكس يسمى جدول السمبلكس الأول، ويتضمن الحل المبدئي وفقاً لطريقة السمبلكس كل المتغيرات الراكدة وذلك كما يلي:

دالة الهدف ومعاملاتها (cj) / المتغيرات الأساسية ومعاملاتها		4	2	0	0	قيمة المتغيرات الأساسية
		X_1	**X_2**	**S_1**	**S_2**	**S.V**
0	S_1	3	1	1	0	9
0	S_2	2	2	0	1	10
Zj		0	0	0	0	
Zj - Cj		4	2	0	0	

يلاحظ أن:

- العمود الأول من جدول الحل المبدئي يحتوي على المتغيرات الأساسية وهي المتغيرات التي يتكون منها برنامج الحل، ويلاحظ أن الحل المبدئي يتكون من المتغيرين S_1 , S_2 وهما متغيرين راكدين، حيث لا يحققان أية أرباح، أما المتغيرات الأخرى التي لم تظهر في برنامج الحل يطلق عليها متغيرات غير أساسية.

- الأعمدة الثاني والثالث والرابع والخامس تحتوي على معاملات المتغيرات الأساسية، أي مقدار الربح الذي تحققه كل وحدة يتم إنتاجها من المتغيرات الأساسية.

- العمود الأخير يحتوي على قيم المتغيرات الأساسية وتتمثل في الكميات التي سيتم إنتاجها من كل متغير أساسي في برنامج الحل.

5- اختبار مثالية الحل المبدئي:

يقصد باختبار مثالية الحل بصفة عامة ما إذا كان الحل المختبر يمثل الحل الأمثل أي الذي يحقق أقصى ربح ممكن في مشكلة تعظيم الربح، أم أن هناك فرص أخرى لتحسينه، ووفقاً لطريقة السمبلكس تتبع قواعد متعارف عليها لاختبار مثالية الحلول المختلفة وتتخلص هذه القواعد في الآتي:

- في حالة تعظيم الأرباح يعتبر برنامج الحل بمثابة حل أمثل عند عدم وجود قيم موجبة في صف اختبار المثالية، أي أنه إذا كانت إحدى قيم صف اختبار المثالية موجبة، فهذا يعني أننا لم نصل إلى الحل الأمثل بعد.
- في حالة تخفيض التكاليف يعتبر برنامج الحل بمثابة حل أمثل عند عدم وجود قيم سالبة في صف اختبار المثالية، أي أنه إذا كانت إحدى قيم صف اختبار المثالية سالبة، فهذا يعني أننا لم نصل إلى الحل الأمثل بعد.

مما سبق يتضح لنا أن جدول الحل المبدئي السابق لا يعتبر حل أمثل وذلك لوجود قيم موجبة في الصف الأخير (صف اختبار المثالية) وهذا يعني أن هناك فرصة لتحسين الحل بإحلال متغيرات أخرى غير أساسية محل المتغيرات الأساسية التي يتضمنها الحل المبدئي.

6- إعداد جدول الحل الثاني:

يشمل إعداد الحل الثاني الإجراءات التالية:

1- **تحديد المتغيرات اللازمة لتحسين الحل المبدئي:** طالما أن الحل المبدئي لا يمثل الحل الأمثل فإنه من الضروري الآن البحث عن المتغيرات اللازمة لتحسين الحل والوصول إلى حل آخر أفضل وذلك على النحو التالي:

أ- تحديد المتغير غير الأساس الواجب دخوله برنامج الحل ليحل محل أحد المتغيرات الأساسية بالبرنامج ويتم ذلك من خلال تحديد عمود الحل وذلك بالنظر إلى أكبر قيمة موجبة في الصف الأخير، فنجد أن تكلفة الفرصة الضائعة للوحدة من المتغير x_1 أكبر من تكلفة الفرصة

الضـائعة للوحـدة مـن المتغيـر x_2 وبـذلك يتحـدد لنـا أن العمـود الأول (الذي يحتوي على المتغير x_1) هو عمود الحل.

ب- تحديد المتغير الأساسي الواجب خروجه من برنامج الحل ليحل محله أحد المتغيرات غير الأساسية خارج برنامج الحل ويتم ذلك من خلال قسمة عمود الطاقة المتاحة (قيمة المتغيرات الأساسية) على معاملات المتغير X_1 في عمود الحل السابق تحديده وذلك كما يلي:

$$R_1 = \frac{9}{3} = 3$$

$$R_2 = \frac{10}{2} = 5$$

ونختار أصغر نتاج قسمة وهو $\frac{9}{3} = 3$ وبذلك فإن عمود الحل هو x_1 وهو المتغير الداخل في الحل، صف الحل (المتغير الخارج من الحل هو S_1). وبذلك يتم إعداد جدول الحل الثاني كما يلي:

حيث يعتبر الرقم (3) وهو نقطة تقاطع صف الحل (المتغير الخارج من الحل) مع عمود الحل (المتغير الداخل من الحل) بأنه رقم المفتاح.

يتم قسمة $\frac{R_1}{3}$ للحصول على قيم الصف الجديد:

$$\overline{R}_1 = \frac{R_1}{3}$$

Cj		4	2	0	0	قيم المتغيرات الأساسية S.V
		X_1	**X_2**	**S_1**	**S_2**	
4	x_1	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	3
0	S_1	2	2	0	1	10
	Zj	0	0	0	0	
	Zj - Cj	4	2	0	0	

يتم إعداد جدول السمبلكس الثالث:

$$\overline{R}_2 = R_2 - 2R_1$$

$$Z_j = 4R_1 + 0S_2$$

Cj		4	2	0	0	
		X_1	X_2	S_1	S_2	
4	X_1	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	3
0	S_2	0	$\frac{4}{3}$	$\frac{-2}{3}$	1	4
	zj	4	$\frac{4}{3}$	$\frac{4}{3}$	0	
	zj - cj	0	$\frac{2}{3}$	$\frac{-4}{3}$	0	12

حيث أنه ما زال هناك قيم موجبة وهي $\frac{2}{3}$ في الصف الأخير (صف اختبار المثالية) وبذلك فإنه يمكن إجراء تحسين على الحل كما يلي:

- تحديد عمود الحل (المتغير الداخل في الحل) وهو x_2).
- تحديد صف الحل (المتغير الخارج من الحل) وذلك كما يلي:

$$R_1 = \frac{3}{\frac{1}{3}} = 9$$

$$R_2 = \frac{4}{\frac{4}{3}} = 3$$

نختار أصغر ناتج قسمة وهو (3) وبذلك بضرب عناصر الصفة الثاني $\times \frac{3}{4}$ حيث أن:

$$\overline{R}_2 = R_2 \times \frac{3}{4}$$

جدول السمبلكس الرابع:

Cj		4	2	0	0	قيم المتغيرات الأساسية
		X_1	X_2	S_1	S_2	
4	x_1	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	3
2	x_2	0	1	$\frac{-1}{2}$	$\frac{3}{4}$	3

	zj	4	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{3}$	0	
	cj	0	$\frac{2}{3}$	$\frac{-4}{3}$	0	12

جدول السمبلكس الخامس:

$$\overline{R}_1 = R_1 - \frac{1}{3}R_2$$

$$Z_j = 4X_1 + 2X_2$$

Cj		4	2	0	0	قيم المتغيرات الأساسية
		X_1	**X_2**	**S_1**	**S_2**	
4	x_1	1	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{-1}{4}$	2
2	x_2	0	1	$\frac{-1}{2}$	$\frac{3}{4}$	3
	zj	4	2	+1	$\frac{+1}{2}$	14
	cj-zj	0	0	-1	$\frac{-1}{2}$	

يلاحظ أن الجدول الخامس هو بمثابة الحل الأمثل وذلك لما يلي:

1- يعتبر الجدول الخامس هو الحل الأمثل لعدم وجود قيم موجبة في صف اختبار المثالية، وهذا يعني عدم وجود فرص لتحسين الحل بإحلال متغيرات أخرى غير أساسية محل المتغيرات الأساسية.

2- أصبحت القيم التي يتضمنها صف اختبار المثالية إما قيم صفرية كما هو واضح أسفل المتغيرات الأساسية وإما قيم سالبة كما هو واضح أسفل المتغيرات غير الأساسية، ويتم تفسير تلك القيم الصفرية والسالبة كما يلي:

أ- تعبر القيم الصفرية عن عدم وجود فرص ضائعة أخرى يمكن تحقيقها وبالتالي فإن الجدول الخامس يمثل الحل الأمثل.

ب- أما القيم السالبة فتفسر كما يلي:

القيمة أسفل المتغير s_1 وهي (1-) تعني أن ضياع أو تعطيل ساعة عمل واحدة في مركز التصنيع يكلف الشركة دولار واحد أي تنخفض أرباحها بنفس هذا المقدار، كما أنه من ناحية أخرى فإن زيادة طاقة مركز التصنيع بمقدار ساعة عمل واحدة فإن ذلك سوف يؤدي إلى زيادة أرباح الشركة بمقدار واحد دولار وهكذا بالنسبة للقيمة السالبة الموجودة أسفل المتغير s_2 وهي $(-\frac{1}{2})$.

ويطلق على هذه القيم السالبة في التحليل الاقتصادي أسعار الظل Shadow Prices أو الأرباح الحدية Marginal Profit.

ج- أن تحديد أسعار الظل للوحدات من الطاقات المتاحة في مراكز الإنتاج تمكننا من حساب القيمة الحقيقية للموارد المتاحة وذلك بإيجاد حاصل ضرب حجم الطاقة المتاحة في سعر الظل أي أن:

- قيمة الطاقة المتاحة في مركز التصنيع = $9 \times 1 = 9$.

-قيمة الطاقة المتاحة في مركز التشطيب = $10 \times \frac{1}{2} = 5$.

- مجموع قيم الموارد المتاحة = 14

ويتضح لنا أن قيمة الموارد المتاحة تتساوى تماماً مع رقم الأرباح الإجمالية الذي حققه الحل الأمثل وهو (14).

مثال (2): أوجد الحل الأمثل للنموذج التالي:

Max:

$Z = 8X_1 + 10X_2$

Subject to:

$4X_1 + 4X_2 \leq 40$

$3X_1 + 6X_2 \leq 36$

$X_1 \geq 0 \ , \ X_2 \geq 0$

خطوات الحل:

1- تحويل المتباينات إلى معادلات بإضافة المتغيرات الراكدة:

Max: $Z = 8X_1 + 10X_2 + 0S_1 + 0S_2$

Subj. to

$4X_1 + 4X_2 + S_1 = 40$

$3X_1 + 6X_2 + S_2 = 36$

$X_1, X_2, S_1, S_2 \geq 0$

2- إعداد جدول السمبلكس الأول:

Cj		**8**	**10**	**0**	**0**	**قيم متغيرات الحل**
		X_1	**X_2**	**S_1**	**S_2**	**S.V**
0	S_1	4	4	1	0	40
0	S_2	3	6	0	1	36
Zj		0	0	0	0	0
Zj - Cj		8	10	0	0	

حيث أن أكبر قيمة موجبة هي 10 في العمود الثاني أسفل المتغيرة X_2 أي أن المتغير الداخل في الحل هو X_2 ولتحديد المتغير الخارج من الحل يتم قسمة قيم متغير الحل s.v على معاملات المتغير الداخل في الحل كما يلي:

$$R_1 = \frac{40}{4} = 10$$

$$R_2 = \frac{36}{6} = 6$$

نختار أصغر ناتج قسمة وهو 6 وبذلك يكون لدينا المتغير s_2 هو المتغير الخارج من الحل:

بتحويل رقم مفتاح الحل إلى واحد صحيح ثم تحويل باقي القيم في عمود الحل (المتغير الداخل إلى أصفار) كما يلي:

$$\overline{R}_2 = \frac{R_2}{6}$$

$$\overline{R}_1 = R_1 - 4R_2$$

$$Z_j = 0S_1 + 10X_2$$

جدول السمبلكس الثاني:

Cj		**8**	**10**	**0**	**0**	**S.V**
		X_1	**X_2**	**S_1**	**S_2**	
0	S_1	2	0	1	$\frac{2}{3}$	16
10	X_2	$\frac{1}{2}$	1	0	$\frac{1}{6}$	6
	zj	5	10	0	$\frac{5}{3}$	60
	cj-zj	3	0	0	$\frac{-5}{3}$	

حيث أن صف اختبار المثالية (الصف الأخير) ما زال به قيم موجبة ولذلك فإن العمود الأول ← المتغير X_1 يمثل المتغير الداخل في الحل ويتم تحديد المتغير الخارج من الحل وذلك بقسمة قيم متغيرات الحل على معاملات المتغير الداخل في الحل:

$$R_1 = \frac{16}{2} = 2$$

$$R_2 = \frac{1}{2} = 2$$

نختار أصغر ناتج قسمة وهو 8 وبذلك فإن المتغير X_1 هو المتغير الداخل في الحل والمتغير s_1 هو المتغير الخارج من الحل، ويكون الرقم (2) هو رقم مفتاح الحل حيث يتم تحويل هذا الرقم إلى واحد صحيح وباقي قيم العمود الذي يمثل المتغير الداخل في الحل إلى أصفار وذلك كما يلي:

$$\overline{R}_1 = \frac{R_1}{2}$$

$$\overline{R}_2 = R_2 - \frac{1}{2}R_1$$

$$Z_j = 8X_1 + 10X_2$$

جدول السمبلكس الثالث:

Cj		8	10	0	0	
		X_1	**X_2**	**S_1**	**S_2**	
8	X_1	1	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{-1}{3}$	8
10	X_2	0	1	$\frac{-1}{4}$	0	2
	zj	8	10	$\frac{3}{2}$	0	84
	cj-zj	0	0	$\frac{-3}{2}$	0	

يتضح أن جدول السمبلكس الثالث يمثل الحل الأمثل وذلك لعدم وجود قيم موجبة في الصف الأخير (صف اختبار الأمثلية) وبذلك فإن:

$$X_1 = 8$$

$$X_2 = 2$$

أقصى ربح ممكن 84.

2-3- استخدام طريقة السمبلكس في حل نماذج تخفيض التكاليف (الحد الأدنى):

في هذا النوع من المشاكل فإن دالة الهدف تتعلق بالتكاليف وليس بالربح كما في مشاكل الحد الأعلى. ولذلك فإننا قبل أن نستخدم طريقة السمبلكس في حل نماذج تخفيض التكاليف فإننا سوف نستعرض أوجه الخلاف الرئيسية بين مشاكل تعظيم الربح ومشاكل تخفيض التكلفة كما يلي:

3-2-1- من حيث دالة الهدف:

حيث أن في مشاكل التعظيم يكون الهدف هو تعظيم متغير تابع لأقصى حد ممكن وهو الربح بحيث تتوقف قيمته على مجموعة من المتغيرات المستقلة، بينما في مشاكل التخفيض يكون الهدف هو تخفيض متغير تابع لأدنى حد ممكن وهو التكلفة، بحيث تتوقف قيمته أيضاً على مجموعة من المتغيرات المستقلة.

3-2-2- من حيث القيود:

في مشاكل التعظيم تكون القيود غالباً في شكل متباينات من نوع أقل من أو يساوي ($\leq$) بينما في مشاكل التخفيض تكون القيود غالباً في شكل متباينات من نوع أكبر من أو يساوي ($\geq$).

3-2-3- من حيث المتغيرات الراكدة:

في مشاكل التعظيم يتم استخدام نوع واحد فقط من المتغيرات الراكدة وهي S_1, S_2, S_3، بينما في مشاكل التخفيض يتم استخدام نوعين من المتغيرات الراكدة وهي:

أ- متغيرات فائضة سالبة ويرمز لها بالرمز (S_1, S_2, S_3, ……, S_n) حسب عدد القيود، وهي عادة تمثل الفرق الزائد في القيود التي يتم تحويلها من متباينات إلى معادلات.

ب- متغيرات اصطناعية (A_1, A_2, A_3, ….., A_n) حسب عدد القيود وهذه المتغيرات تكون موجبة ولا دور لها إلا في معادلة القيمة السالبة للمتغيرات الفائضة السالبة (S_1, S_2, S_3, ……, S_n). فمثلاً:

$$3X_1 + 4X_2 \geq 25$$

بإضافة متغيرات فائضة سالبة:

$$3X_1 + 4X_2 - S_1 = 25$$

بفرض أن: X_1 بالقيد السابق تساوي 5.

X_2 بالقيد السابق تساوي 6.

فإنه عند حل المعادلة:

$$3(5) + 4(6) - S_1 = 25$$

$$15 + 24 - S_1 = 25$$

$39 - S_1 = 25$

فإن :

$S_1 = 39 - 25 = 14$

وبفرض أن:

$X_1 = 2$

$X_2 = 3$

وحل المعادلة كما يلي:

$3(2) + 4(3) - S_1 = 25$
$6 + 12 - S_1 = 25$
$18 - S_1 = 25$

فإن: $S1 = -7$

وهذا لا يجوز لأنه يتعارض مع شرط عدم السلبية ولذلك تم إضافة المتغيرات الاصطناعية $(A_n, \ldots.. A_2, A_1)$ كما يلي:

يكون شكل القيد:

$3X_1 + 4X_2 - S_1 + A_1 = 25$

فعندما يتم التعويض عن: $X_1 = 2, \;\; X_2 = 3$

فإن S_1 تأخذ قيمة سالبة إلا أن A_1 تمنع ظهور هذه القيمة السالبة حيث تعطيها $(+7)$ فتحول S_1 إلى الصفر.

ويلاحظ أنه من أجل إعطاء الشكل الجدولي فإن جميع المتغيرات السالبة والموجبة يجب أن تظهر بدالة الهدف وبمعاملات صفرية بالنسبة لـ$(S_n\ldots,S_2, S_1)$، أما بالنسبة للمتغيرات الاصطناعية من أجل أن لا تظهر بالحل فإن معاملات هذه المتغيرات بالعادة تستخدم قيم كبيرة جداً أو (M) الكبيرة (Big M).

3-2-4- من حيث اختبار المثالية:

في مشاكل التعظيم يتم اختبار المتغير غير الأساسي صاحب أكبر قيمة موجبة في صف اختبار المثالية لكي يدخل الحل كمتغير أساسي، بينما في مشاكل التخفيض يتم اختيار المتغير غير الأساسي صاحب أكبر قيمة سالبة في صف اختبار المثالية لكي يدخل الحل كمتغير أساسي.

3-2-5- من حيث تحقق المثالية:

في مشاكل التعظيم تتحقق المثالية عندما لا يتضمن اختبار المثالية أية قيم موجبة، أي تكون كل الأرقام صفرية أو سالبة، أما في مشاكل التخفيض تتحقق المثالية عندما لا يتضمن صف اختبار المثالية أية قيم سالبة أي تكون كل الأرقام صفرية أو موجبة.

مثال (1): أوجد الحل الأمثل للنموذج التالي:

Min: $C = 12X_1 + 10X_2$

Subject to:

$$X_1 + 4X_2 \geq 8$$

$$3X_1 + 2X_2 \geq 6$$

$$X_1 \geq 0\ ,\ \ X_2 \geq 0$$

خطوات الحل:

1- تحويل المتباينات إلى معادلات بإضافة المتغيرات الفائضة والمتغيرات الاصطناعية.

- دالة الهدف:

$$Min \qquad C = 12X_1 + 10X_2 + 0S_1 + 0S_2 + MA_1 + MA_2$$

-القيود:

Subject to:

$$X_1 + 4X_2 - S_1 + 0S_2 + A_1 + 0A_2 = 8$$

$$3X_1 + 2X_2 + 0S_1 - S_2 + 0A_1 + A_2 = 6$$

- شرط عدم السلبية: *All Variable* ≥ 0

$$\underbrace{X_1, X_2,}_{Real}\ \ \underbrace{S_1, S_2,}_{Slack}\ \ \underbrace{A_1, A_2}_{Artificial} \geq 0$$

2- إعداد جدول السمبلكس الأولي:

Cj		12	10	0	0	M	M	S.V
		X_1	X_2	S_1	S_2	A_1	A_2	
M	A_1	1	4	-1	0	1	0	8
M	A_2	3	2	0	-1	0	1	6
zj		4M	6M	-M	-M	M	M	14M
cj - zj		12-4M	10-6M	M	M	0	0	

من صف اختبار الأمثلية (الصف الأخير) نختار أكبر قيمة سالبة وهي (10 - 6M) وبذلك فإن المتغير الداخل في الحل هو x_2 ويتم تحديد المتغير غير الأساسي الخارجي من الحل كما يلي:

$$R_1 = \frac{8}{4} = 2$$

$$R_2 = \frac{6}{2} = 3$$

ونختار أصغر ناتج قسمة وهو 2 وبالتالي فإن الرقم (4) هو الرقم المحوري أو الرقم المفتاح (Key Number). حيث يتم تحويل هذا الرقم إلى واحد صحيح وباقي الأرقام في عمود الحل إلى أصفار.

$$\overline{R}_1 = \frac{R_1}{4}$$

$$\overline{R}_2 = R_2 - 2R_1$$

$$Z_j = 10X_2 + MA_2$$

جدول السمبلكس الثاني:

Cj	12	10	0	0	M	M	S.V
	X_1	X_2	S_1	S_2	A_1	A_2	
10 X_2 M A_2	,25 ,25	1 0	-,25 ,25	0 -1	,25 -,5	0 1	2 2
zj	2,5+,25M	10	-2,5+,25M	-M	2,5-,5M	M	20+2M
	9,5-,25M	0	2,5-,25M	M	-2,5+,5M	0	

وبالنظر إلى صف اختبار المثالية نجد أن هناك قيم سالبة ولذا فإن الحل الأمثل لم يتحقق وبالتالي فإنه يتم عمل جدول السمبلكس الثالث.

حيث أن (9,5 - ,25M) هي أكبر رقم سالب ولذا فإن المتغير x_1 هو المتغير الداخل في الحل ويتم تحديد المتغير الخارج من الحل كما يلي:

$$R_1 = \frac{2}{,25} = 8$$

$$R_2 = \frac{2}{,25} = 8$$

تم اختبار الصف الثاني حيث أنه هو الذي يوجد به متغير غير أساسي وهو A_2 ويكون الرقم (2.5) الواقعة في الصف الثاني هو الرقم المحوري (أو الرقم المفتاح) وبذلك يتم تحويل هذا الرقم إلى واحد صحيح وباقي عناصر العمود الذي به المتغير الداخل في الحل إلى أصفار كما يلي:

$$\overline{R}_2 = \frac{R_2}{2,5}$$

$$R_1 = R_1 - ,25R_2$$

$$Z_j = 10X_2 + 12X_1$$

جدول السمبلكس الثالث:

Cj	12	10	0	0	M	M	S.V
	X_1	X_2	S_1	S_2	A_1	A_2	
10 X_2 12 X_1	0 1	1 0	-,3 ,2	,1 -,4	,3 -,2	-,1 ,4	1,8 ,8
zj	12	10	-,6	-3,8	,6	3,8	276
zj - cj	0	0	,6	3,8	M-,6	M-3,8	

ويلاحظ أن الصف الأخير وهو صف اختبار المثالية لم توجد به قيم سالبة وأن جميع الحدود موجبة أو صفرية ولذلك فإنه:

$,8 = X_1$

$1,8 = X_2$

أقل تكلفة هي 276.

مثال (2) أوجد الحل الأمثل للنموذج التالي:

- دالة الهدف:

$$Min \quad C = 6X_1 + 4X_2 + 8X_3$$

- القيود:

Subject to:

$$3X_1 + 2X_2 + X_3 \geq 2000$$

$$4X_1 + X_2 + 3X_3 \geq 4000$$

$$2X_1 + 2X_2 + 2X_3 \geq 3000$$

شرط عدم السلبية:

All Real Variable ≥ 0

$X_1, X_2, X_3, \geq 0$

خطوات الحل:

تحويـل المتبايـنــات إلــى معـادلات بطـرح المتغيـرات الراكـدة (Slack) وإضافة المتغيرات الاصطناعية (Artificial).

$$Min \quad C = 6X_1 + 4X_2 + 8X_3 + 0S_1 + 0S_2 + 0S_3 + MA_1 + MA_2 + MA_3$$

Subject to:

$$3X_1 + 2X_2 + X_3 - S_1 + A_1 = 2000$$

$$4X_1 + X_2 + 3X_3 - S_2 + A_2 = 4000$$

$$2X_1 + 2X_2 + 2X_3 - S_3 + A_3 = 3000$$

شرط عدم السلبية:

$$\underbrace{X_1, X_2, X_3}_{Real},\ \underbrace{S_1, S_2, S_3}_{Slack},\ \underbrace{A_1, A_2, A_3}_{Artificial} \geq 0$$

إعداد جدول السمبلكس الأول:

Cj	6	4	8	0	0	0	M	M	M	S.V
	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3	A_1	A_2	A_3	
M A_1	3	2	1	-1	0	0	1	1	0	2000
M A_2	4	1	3	0	-1	0	0	1	0	4000
M A_3	2	2	2	0	0	-1	0	0	1	3000
zj	9M	5M	6M	-M	-M	-M	M	M	M	9000M
zj - cj	6-9M	4-5M	8-9M	M	M	M	0	0	0	

حيث أن أكبر رقم سالب في صف اختبـار المثاليـة هو 9M – 6 يقـع فـي العمـود الأول ولـذا فـإن المتغير X_1 هـو المتغيـر الـداخل فـي الحـل ولتحديد المتغيـر الخــارج مـن الحـل نقـوم بقسـمة قـيم المتغيـرات الأساسـية علــى معاملات المتغير الداخل في الحل (العمود الأول) كما يلي:

$$R_1 = \frac{2000}{3} = 666,67$$

$$R_2 = \frac{4000}{4} = 1000$$

$$R_3 = \frac{3000}{2} = 1500$$

نختار أصغر نـاتج قسمة وهو 666.67.

فيكون الرقم (3) هو الرقم المفتاح (Key) أو الرقم المحوري (Pivot) ويتم تحويل هو الرقم إلى واحد صحيح وباقي الأرقام في العمود إلى أصفار كما يلي.

$$\overline{R}_1 = \frac{R_1}{3}$$

$$\overline{R}_2 = R_2 - 4R_1$$

$$\overline{R}_3 = R_3 - 2R_1$$

جدول السمبلكس الثاني:

Cj	6	4	8	0	0	0	M	M	M	S.V
	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3	A_1	A_2	A_3	
5 x_1	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{-1}{3}$	0	0	$\frac{1}{3}$	0	0	666.67
M A_1	0	$\frac{-5}{3}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{4}{3}$	0	0	$\frac{-4}{3}$	1	0	1333,33
M A_2	0	$\frac{2}{3}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{2}{3}$	0	-1	$\frac{-2}{3}$	0	1	1666,67
Zj	6	4-M	2+3M	-2+2M	0	-M	2-2M	M	M	
zj - cj	0	M	6-3M	2-2M	0	M	3M-2	0	0	4000+3000M

من الجدول السابق يتضح أن هناك قيم سالبة في صف اختبار المثالية وهو الصف الأخير ونختار أكبر رقم سالب وهو (6 – 3M) في العمود الثالث وبذلك فإن المتغير (X_3) هو المتغير الداخل في الحل ويتم تحديد المتغير الخارج من الحل كما يلي:

$$R_1 = \frac{666,67}{\frac{1}{3}} = 2000$$

$$R_2 = \frac{1333,33}{\frac{5}{3}} = 800$$

$$R_3 = \frac{1666,67}{\frac{4}{3}} = 1250$$

نختار أصغر ناتج وهو 800 وبذلك فإن الرقم $\left(\frac{5}{3}\right)$ هو الرقم المحوري (الرقم المفتاح) حيث يتم تحويل هذا الرقم إلى واحد صحيح وباقي أرقام العمود الذي يمثل المتغير الداخل في الحل إلى أصفار.

$$\overline{R}_2 = \frac{R_2}{\frac{5}{3}}$$

$$\overline{R}_1 = R_1 - \frac{1}{3}R_2$$

$$\overline{R}_3 = R_3 - \frac{4}{3}R_2$$

جدول السمبلكس الثالث:

Cj	6	4	8	0	0	0	M	M	M	S.V
	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3	A_1	A_2	A_3	
6 x_1	1	1	0	$\frac{-3}{5}$	$\frac{1}{5}$	0	$\frac{3}{5}$	$\frac{-1}{5}$	0	400
8 X_3	0	-1	1	$\frac{4}{5}$	$\frac{-3}{5}$	0	$\frac{-4}{3}$	$\frac{3}{5}$	0	800
M A_3	0	2	0	$\frac{-2}{5}$	$\frac{4}{5}$	-1	$\frac{2}{5}$	$\frac{-4}{3}$	1	600
ZJ	6	-2+2M	8	$\frac{14}{5}-\frac{2M}{5}$	$\frac{-18}{5}+\frac{4M}{5}$	-M	$\frac{-14}{5}+\frac{2M}{5}$	$\frac{18}{5}-\frac{4M}{5}$		88000+ 600M
zj - cj	0	6-2M	0	$\frac{2M}{5}-\frac{14}{5}$	$\frac{-4M}{5}+\frac{18}{5}$	M	$\frac{3M}{5}+\frac{14}{5}$	$\frac{9M}{5}-\frac{18}{5}$	0	

من الجدول السابق يتضح أن الصف الأخير (صف اختبار المثالية ما زال به قيم سالبة وهي (6 – 2M) ولذلك فإنه يتم إدخال المتغير X_2 في الحل ولتحديد المتغير غير الأساسي الخارج من الحل:

$$R_1 = \frac{400}{1} = 400$$

$$R_2 = \frac{800}{-1} = -800$$

$$R_3 = \frac{600}{2} = 300$$

وبالتالي سوف يكون الصف الثالث A_3 هو المتغير الخارج من الحل لأنه هو الصف الذي يقابله أقل خارج قسمة موجب لعمود قيم المتغيرات الأساسية على عمود مفتاح الحل.

ويكون الرقم (2) هو مفتاح الحل حيث يتقاطع عنده كل من عمود الحل وصف الحل.

حيث يتم تحويل الرقم (2) إلى واحد وباقي عناصر العمود إلى أصفار وذلك كما يلي:

$$\overline{R}_3 = \frac{R_3}{2}$$

$$\overline{R}_1 = R_1 - R_3$$

$$\overline{R}_2 = R_2 + R_3$$

جدول السمبلكس الرابع:

Cj	6	4	8	0	0	0	M	M	M	S.V
	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3	A_1	A_2	A_3	
6 x_1	1	0	0	$\frac{-2}{5}$	$\frac{-1}{2}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{-1}{2}$	100
8 X_3	0	0	1	$\frac{3}{5}$	$\frac{-1}{5}$	$\frac{-1}{2}$	$\frac{-3}{3}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{2}$	1100
4 X_2	0	1	0	$\frac{-1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{-1}{2}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{-2}{5}$	$\frac{1}{2}$	300
ZJ	6	6	8	$\frac{8}{5}$	$\frac{6}{5}$	$\frac{-18}{5}$	$\frac{-8}{5}$	$\frac{+6}{2}$	$\frac{+6}{2}$	10600
zj - cj	0	0	0	$\frac{-8}{5}$	$\frac{6}{5}$	$\frac{18}{5}$	$M+\frac{8}{5}$	$M-\frac{6}{5}$	$M-\frac{6}{2}$	

يلاحظ أن الجدول السابق لا يمثل الحل الأمثل لوجود قيم سالبة في صف اختبار المثالية (الصف الأخير أسفل المتغير S_1 وهو الرقم $\frac{-8}{5}$ مما يعني أن هناك فرصة أخرى لتخفيض التكاليف.

وبذلك فإن العمود S_1 هو عمود الحل ويتم تحديد المتغير الخارج من الحل كما يلي:

$$R_1 = \frac{100}{\frac{-2}{5}} = -250$$

$$R_2 = \frac{1100}{\frac{3}{5}} = 1833{,}33$$

$$R_3 = \frac{300}{\frac{-1}{5}} = -1500$$

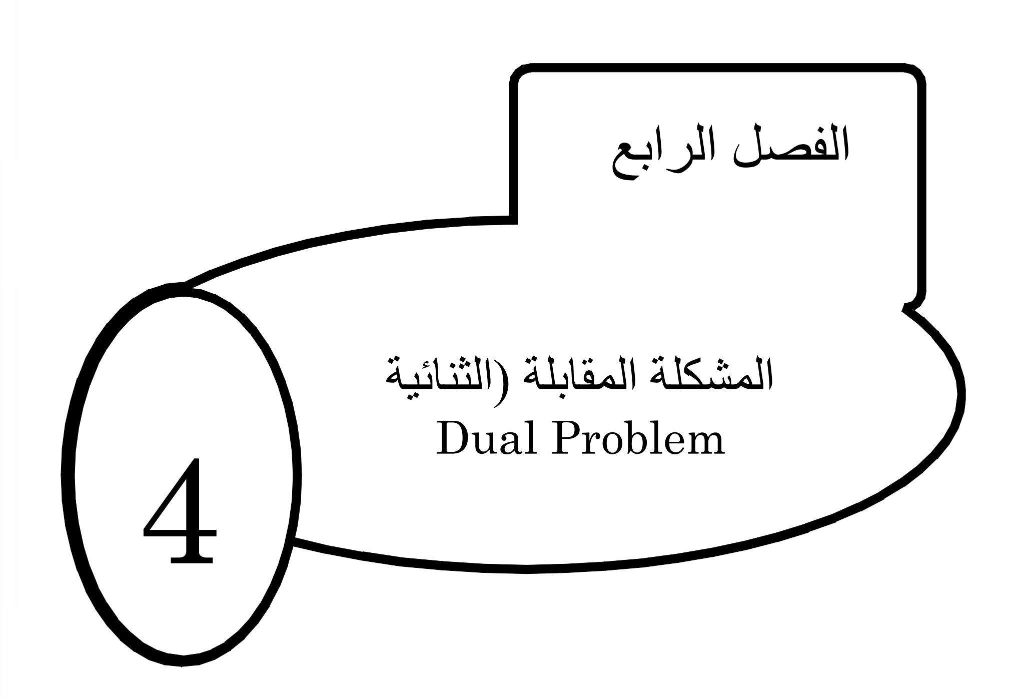
وبذلك فإن الرقم $\frac{3}{5}$ هو الرقم المحوري لأنه يمثل أقل قيمة موجبة

وبذلك فإن المتغير الداخل في الحل هو S_1 والمتغير الخارج من الحل هو X_3 وبالتالي فإنه يتم إعداد جدول السمبلكس الخامس.

Cj	6	4	8	0	0	0	M	M	M	S.V
	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3	A_1	A_2	A_3	

x_1	1	0	$\frac{2}{3}$	0	$\frac{-1}{3}$	$\frac{1}{6}$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{-1}{6}$	833.3
S_1	0	0	$\frac{5}{3}$	1	$\frac{-1}{3}$	$\frac{-5}{3}$	-1	$\frac{1}{3}$	$\frac{5}{6}$	833.33
X_2	0	1	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{-2}{3}$	0	$\frac{-1}{3}$	$\frac{2}{3}$	666.67
ZJ	6	4	$\frac{16}{3}$	0	$\frac{-2}{3}$	$\frac{-5}{3}$	0	$\frac{2}{3}$	$\frac{5}{3}$	7666.6
zj - cj	0	0	$\frac{8}{3}$	0	$\frac{2}{3}$	$\frac{5}{3}$	M	$M-\frac{2}{3}$	$M-\frac{5}{3}$	

من الجدول السابق يتضح أنه يمثل الحل الأمثل، حيث أنه لا توجد قيم سالبة في صف اختبار المثالية، وكذلك عدم احتواء رقم التكاليف النهائي على المعامل (M) المتناهي في الكبر وذلك لعدم وجود أية متغيرات اصطناعية ضمن متغيرات الحل وبذلك فإن $X_1 = 3833$، $X_2 = 67666$, وأقل تكلفة تكون 67666.,


الفصل الرابع
المشكلة المقابلة (الثنائية
Dual Problem
4

الفصل الرابع
المشكلة المقابلة (الثنائية)
Dual Problem

1- مقدمة:

إن المشاكل التي تم صياغتها بأسلوب البرمجة الخطية يطلق عليها النماذج الأولية (Primal Models) ومن الممكن إعادة صياغة النموذج الأولي بأسلوب آخر يطلق عليه النموذج المقابل (الثنائي) (Dual) إذ أن لكل نموذج في البرمجة الخطية يوجد نموذج آخر يقابله، وبذلك فإنه في أسلوب البرمجة الخطية أن كل مشكلة من نوع الحد الأعلى (تعظيم) تتوافق عادة مع مشكلة من نوع الحد الأدنى (تخفيض) وهذا ما نجده بالنموذج نفسه، حيث أن دالة الهدف في مشاكل التعظيم (الحد الأعلى) تأخذ شكل (Max)، وفي نفس النموذج نجد أن الموارد تأخذ قيود في صورة أقل من أو يساوي (≤) بينما دالة الهدف في مشاكل التخفيض (الحد الأدنى) تأخذ شكل (Min) وفي نفس النموذج نجد أن الموارد تأخذ قيود في صورة أكبر من أو يساوي (≥)، ولهذا فإن المشكلة الأصلية أو النموذج الأصلي في أسلوب البرمجة الخطية إذا كان من نوع الحد الأعلى فإن هناك مشكلة مناظرة له من نوع الحد الأدنى تسمى المشكلة الثنائية أو المشكلة المقابلة.

2- مميزات وخصائص المشكلة الثنائية:

1- إذا كانت المشكلة الأولية تمثل مشكلة الحد الأعلى (تعظيم) فإن المشكلة الثنائية تكون مشكلة الحد الأدنى (تخفيض) والعكس.

2- إن ثوابت الربح C_j في المشكلة الأولى تحل محل الثوابت (ثوابت الموارد) في المشكلة الثنائية والعكس.

3- إذا كانت المشكلة الأولية تستلزم علاقة (≤) فإن المشكلة الثنائية تستلزم علاقة (≥) والعكس.

4 – في المتباينات فإن المعاملات الموجودة من اليسار إلى اليمين توضع في المشكلة الثنائية من أعلى إلى أسفل.

5- هناك مجموعة من المتغيرات الجديدة تظهر بالمشكلة الثنائية تحل محل متغيرات المشكلة الأصلية أو الأولية.

6- عدد المتغيرات في المشكلة الأولية (الأصلية) يساوي عدد القيود في المشكلة الثنائية، فمثلاً إذا كان لدينا عدد n من المتغيرات (X_1, X_2 , ... X_n) في المشكلة الأصلية أو الأولية، فإن عدد القيود في المشكلة الثنائية سوف يساوي (n) عدد المتغيرات.

7- عدد القيود في المشكلة الأولية (الأصلية) يساوي عدد المتغيرات في المشكلة الثنائية، فمثلاً إذا كان لدينا عدد من المتباينات (S_1, S_2, ... S_m) عدد (m) من القيود فإن عدد المتغيرات في المشكلة الثنائية يساوي عدد القيود في المشكلة الأصلية (m).

8- إن ثنائية المشكلة الثنائية سوف يرجع بالمشكلة إلى المشكلة الأصلية (الأولية) كما هي.

9- يساعد نموذج المشكلة الثنائية على التوصل إلى الحل بصورة أسرع في بعض الأحيان حيث أن طريقة حل المشكلة الثنائية يستلزم خطوات رياضية أقل تعقيد من الخطوات اللازمة لحل المشكلة الأولية.

10- يمكن إيجاد الحل الأمثل في النموذج المقابل عند وجود متغير أساسي في النموذج ذو قيمة سالبة.

3- صياغة المشكلة الثنائية:

إذا كان لدينا المشكلة التالية:

Max $Z = b_1x_1 + b_2x_2$

Subject to:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \leq R_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \leq R_2$$

$$x_1 , x_2 \geq 0$$

فإنه يتم صياغة النموذج المقابل أو المشكلة الثنائية كما يلي:

Min $C = R_1Y_1 + R_2Y_2$

Subject to:

$$a_{11}y_1 + a_{12}y_2 \geq b_1$$

$$a_{12}y_1 + a_{22}y_2 \geq b_2$$

$y_1, y_2 \geq 0$

وبناء على ذلك فإنه إذا كانت الصيغة العامة للبرمجة الخطية على الصورة (الصيغة العامة للمشكلة الأولية).

$$Max \quad Z = \sum_{j=1}^{n} b_i x_i$$

$Subj.to:$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq R_i$$

$$x_j \geq 0$$

حيث أن:
$$m............,3,2,1 = i$$
$$n............,3,2,1 = j$$

فإن الصيغة العامة للمشكلة المقابلة (المشكلة الثنائية):

$$Max \quad Z = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i$$

$Subj.to:$

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_j \geq b_j$$

$$y_i \geq 0$$

حيث أن:
$$m...........4,3,2,1 = i$$
$$n............,3,2,1 = j$$

4- تطبيقات على تحويل المشكلة الأولية (Primal) إلى المشكلة الثنائية (Dual):

مثال (1) حول المشكلة الأولية التالية إلى المشكلة الثنائية المقابلة:

$Max \quad Z = 54x_1 + 80x_2$

Subject to:

$5x_1 + 20x_2 \leq 400$

$10x_1 + 15x_2 \leq 450$

$x_1, x_2 \geq 0$

خطوات الحل:

يتم تحويل المشكلة الأولية إلى المشكلة الثنائية المقابلة كما يلي وذلك بوضع الثوابت مكان عوامل متغيرات دالة الهدف وتحويل Max إلى Min.

$$Min \qquad C = 400y_1 + 450y_2$$

Subject to:

$$5y_1 + 10y_2 \geq 54$$
$$20y_1 + 15y_2 \geq 80$$
$$y_1, y_2 \geq 0$$

مثال (2) حول المشكلة الأولية التالية إلى المشكلة المقابلة (الثنائية):

$$Min \qquad C = 28x_1 + 50x_2 + 60x_3$$

Subject to:

$$2x_1 + x_2 + 3x_3 \geq 30$$
$$6x_1 + 2x_2 + 3x_3 \geq 40$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

خطوات الحل:

يتم تحويل المشكلة الأولية من نوع الحد الأدنى إلى مشكلة ثنائية من نوع الحد الأعلى وذلك كما يلي:

$$Max \qquad Z = 30y_1 + 40y_2$$

Subject to:

$$2y_1 + 6y_2 \leq 28$$
$$y_1 + 2y_2 \leq 50$$
$$3y_1 + 3y_2 \leq 60$$
$$y_1, y_2 \geq 0$$

مثال (3): حول المشكلة الأولية التالية إلى المشكلة المقابلة (الثنائية):

$$Max \qquad Z = 20x_1 + 15x_2 + 10x_3$$

Subject to:

$$2x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 50$$

$$4x_2 + 5x_3 \leq 40$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

خطوات الحل:

يتم تحويل المشكلة الأولية من نوع الحد الأعلى إلى مشكلة ثنائية من نوع الحد الأدنى وذلك كما يلي:

$$Min \quad C = 50y1 + 40y2$$

Subject to:

$$2y1 \quad \geq 20$$

$$2y1 + 4y2 \geq 15$$

$$3y1 + 5y2 \leq 10$$

$$y1, y2 \geq 0$$

5- حل المشكلة الثنائية (المشكلة المقابلة):

يتم استخدام الطريقة البيانية أو طريقة السمبلكس لحل المشكلة الثنائية.

مثال (1) حول المشكلة الأولية التالية إلى المشكلة الثنائية ثم الحل:

$$Max \quad Z = 4x_1 + 5x_2$$

Subject to:

$$x_1 + 2x_2 \leq 10$$

$$6x_1 + 6x_2 \leq 30$$

$$8x_1 + 4x_2 \leq 40$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

خطوات الحل:

(1) تحويل مشكلة التعظيم إلى مشكلة تخفيض (إيجاد المشكلة المقابلة).

$$Min \quad C = 10y_1 + 30y_2 + 40y_3$$

Subject to:

$$y_1 + 6y_2 + 8y_3 \geq 4$$

$$2y_1 + 6y_2 + 4y_3 \geq 5$$

$$y_1, y_2, y_3 \geq 0$$

ثم الحل باستخدام طريقة السمبلكس كما سبق:

-تحويـل المتبايـنـات إلــى معــادلات وذلـك بطـرح المتغيـرات الراكـدة وإضافة المتغيرات الاصطناعية كما يلي:

- دالة الهدف:

$$Min\ C = 10y_1 + 30y_2 + 40y_3 + 0S_1 + 0S_2 + MA_1 + MA_2$$

- القيود:

Subject to:

$$y_1 + 6y_2 + 8y_3 - S_1 + A_1 = 4$$

$$2y_1 + 6y_2 + 4y_3 - S_2 + A_2 = 5$$

شرط عدم السلبية: $y_1, y_2, y_3, S_1, S_2, A_1, A_2 \geq 0$

إعداد جدول السمبلكس الأول:

Cj	10	30	40	0	0	M	M	S.V
	y_1	y_2	y_3	S_1	S_2	A_1	A_2	
M A_1	1	6	8	-1	0	1	0	4
M A_2	2	6	4	0	-1	0	1	5
zj	5M	12M	12M	-M	-M	M	M	0
zj - cj	10-5M	30-12M	40-12M	M	M	0	0	

ثم يكمل الحل كما سبق في مشكلة التخفيض.

مثال (2): حول المشكلة الأولية التالية إلى المشكلة الثانية ثم الحل:

$$Min\ C = 12x_1 + 20x_2 + 25x_3$$

Subject to:

$$2x_1 + 3x_2 + 2x_3 \geq 60$$

$$3x_1 + 4x_2 + 5x_2 \geq 100$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

خطوات الحل:

-يتم تحويل مشكلة الحد الأدنى إلى مشكلة الحد الأعلى كما يلي:

$$Max\ Z = 60y_1 + 100y_2$$

Subject to:

$$2y_1 + 3y_2 \leq 12$$

$$3y_1 + 4y_2 \leq 5$$

$$2y_1 + 5y_2 \leq 25$$

$$y_1, y_2 \geq 0$$

يتم الحل باستخدام طريقة السمبلكس كما يلي:

1- تحويل المتباينات إلى معادلات بإضافة المتغيرات الراكدة كما يلي:

دالة الهدف:

$Max\ Z = 6y_1 + 100y_2 + 0S_1 + 0S_2 + 0S_3$

القيود:

Subject to:

$2y_1 + 3y_2 + S_1 = 12$

$3y_1 + 4y_2 + S_2 = 20$

$2y_1 + 5Y_2 + S_3 = 25$

شرط عدم السلبية:

$y_1, y_2, y_3, S_1, S_2, S_3 \geq 0$

2- إعداد جدول السمبلكس الأول كما يلي:

Cj	**60**	**100**	**0**	**0**	**0**	**S.V**
	y_1	**y_2**	**S_1**	**S_2**	**S_3**	
0 S_1	2	3	1	0	0	12
0 S_2	3	4	0	1	0	20
0 S_3	2	5	0	0	1	25
zj	0	0	0	0	0	0
zj - cj	60	100	0	0	0	

ثم يكمل الحل كما سبق في مشكلة التعظيم.

تـم بـعـونـه
تـعـالـى
الـمـؤلـفـان

المراجع

أولاً: المراجع العربية

-أندرسون، ديفيد، وآخرون، «الأساليب الكمية في الإدارة»، تعريب وترجمة د. محمد توفيق البلقيني، مرفت طلعت المحلاوي، دار المريخ للنشر، الرياض، المملكة العربية السعودية، 2006.

-د. حسين علي بخيت. د. غالب عوض الرفاعي «أساسيات الاقتصاد الرياضي»، دار المناهج للنشر والتوزيع، عمان، الأردن، 2002.

-د. حسين علي بخيت، د. غالب عوض الرفاعي، «أساليب وتقنيات التحليل الكمي للأعمال باستخدام الحاسوب»، الأهلية للنشر والتوزيع، عمان، الأردن 2007.

-د. دلال صادق الجواد، د. حميد ناصر الفتال، «بحوث العمليات»، دار اليازوري العلمية للنشر والتوزيع، عمان، الأدرن 2008

-د. محمود الفياض، د. عيسى قدادة، «بحوث العمليات»، دار اليازوري العلمية للنشر والتوزيع، عمان، الأردن، 2007.

-د.محمد مصطفى الجبالي، د. سيد فتحي أبو الهنا، «دراسات محاسبية في الأساليب الكمية وبحوث العمليات»، أكاديمية المدينة، المعهد العالي للتكنولوجيا والإدارة، القاهرة، 2008/2007.

-د. مختار محمد متولي، «الأساليب الرياضية للاقتصاديين»، جامعة الملك سعود، عمادة شئون المكتبات، الرياض، 1993.

-د. زكية أحمد مشعل، د. وليد إسماعيل السيفو، «الرياضيات في العلوم الاقتصادية والتجارية»، الأهلية للنشر والتوزيع، عمان، الأردن، 2004.

-د. محمد صبري العطار، «بحوث العمليات في المحاسبة»، بدون ناشر، القاهرة، 1989.

- د. وليد إسماعيل السيفو، د. عبد الحفيظ بلعربي، «الاقتصاد الإداري» دار الأهلية للنشر والتوزيع، عمان، 2006.

-د. محمد محمود الكاشف، د. طارق عزت عبد الباري، د. عيد أحمد أبو بكر، د. عبد الله صميدة، «مبادئ الرياضيات البحتة في المشروعات التجارية»، دار النهضة العربية، القاهرة، 2004.

-د. محمد محمود الكاشف، د. طارق عزت عبد الباري، د. عيد أحمد أبو بكر، «رياضيات التمويل والاستثمار (الرياضيات المالية)»، دار النهضة العربية، القاهرة، 2005.

-د. طارق عزت عبد الباري، د. حسني أحمد الخولي، د. عيد أحمد أبو بكر، «مبادئ الرياضيات البحتة للتجاريين: تطبيقاتها في المشروعات التجارية»، دار النهضة العربية، القاهرة، بدون سنة نشر.

الرسائل:

-عيد أحمد أبو بكر، «تقييم السياسة الاستثمارية لنظام التأمينات الاجتماعية في مصر خلال الفترة من 1984-1994» رسالة ماجستير، كلية التجارة، جامعة القاهرة، 1997.

-عيد أحمد أبو بكر، «استخدام الأساليب الكمية في قياس وإدارة الأخطار المؤثرة في الملاءة المالية لشركات التأمين المصرية: دراسة تطبيقية على التأمينات العامة» رسالة دكتوراه، كلية التجارة، جامعة القاهرة، 2003.

-Archibald, G.C., and R.G., lipsey, "An introduction to A Mathematical Treatment of economics". Butler and Tanner Limited, 3rd. ed. London, 1997.

-Taha, H.A., "Operations Research: An introduction", Macmillan Publishing company, New York, 1997.

-Render, Sleair and Hanna "Quantitative analysis for management", prentice-Hall, New Jersey, U.S.A., 2006.

-Milen Zeleny, "Multiple Criteria decision making", McGraw-Hill Book company, New York, 1982.